Analyse numérique
Troisième année de licence M
2010/2011

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Travaux dirigés sur ordinateur n°**7** :
Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

---

Question 1 : Résolution théorique. Soient l'équation différentielle :

$$(E)\ y'(t) = \cos(t) \cdot y(t)$$

et (CI) la condition initiale $y(0) = 1$.
Résoudre (E) et $(E; CI)$ sur $\mathbb{R}$. On note z la solution de $(E; CI)$.

Question 2 : Idée de l'approximation Soit h un réel positif "petit", que valent $z(0)$, $z'(0)$? On cherche à approcher $z(h)$ en utilisant la tangente à la courbe, notons u_1 cette valeur, que vaut u_1 ?
On cherche à approcher $z(2h)$ en utilisant la tangente à la solution de (E) qui passe par le point (h, y_1), notons u_2 cette valeur, déterminer u_2.

Question 3 : Méthode d'Euler. Pour approcher numériquement la solution d'une équation différentielle sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

On peut utiliser une discrétisation de l'intervalle en posant $h = \frac{T}{N}$, $t_n = t_0 + nh$, $0 \leq n \leq N$ et

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n),\ 0 \leq n \leq N - 1$$

Le premier terme de la suite u_0 est donnée (il peut être différent de y_0). On se propose d'approcher la solution z de $(E; CI)$ de la question 1, avec la méthode d'Euler, sur l'intervalle $[0, 20]$.

1. Dans ce cas particulier, déterminer la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).
2. En posant $N = 100$, construire un vecteur U contenant $u_0, u_1, \ldots, u_N$.
3. Représenter sur un même dessin la fonction z ainsi que les $N + 1$ points de coordonnées (t_n, u_n).

Question 4 : Vitesse de convergence Dans cette question on applique la méthode d'Euler à l'équation

$$\forall t \in [0; 2], y'(t) = 2ty(t) \text{ avec y(0)=1}$$

1. Résoudre l'équation différentielle. Quelle est la valeur $y(2)$ de la solution en $t = 2$?
2. Écrire une fonction Scilab `er`, qui prend comme argument un entier N et qui renvoie la différence $y(2) - u_N$, où u_N est la valeur approchée de $y(2)$ obtenue par la méthode d'Euler avec N points.
3. Représenter les points $(N,$`er(N)`$)$, pour N variant entre 50 et 200.
4. Représenter les points `(log(N),log(er(N)))`, pour N variant entre 50 et 200.
5. Déterminer α tel que l'erreur $y(2) - u_N$ soit un $O(\frac{1}{N^\alpha})$.

Question 5 : Méthode du point du milieu. Dans cette question, il s'agit d'approcher la solution de (E), à l'aide d'un autre schéma.

$$\begin{cases} u(n+1) &= u(n) + \frac{1}{N} f(t(n) + \frac{1}{2N}, u(n) + \frac{1}{2N} f(t(n), u(n))) \\ u(1) &= 1 \end{cases}$$

Reprendre l'étude de la question précedente avec ce schéma.