Analyse numérique
Troisième année de licence M
2009/2010

Travaux dirigés sur ordinateur n°**7** :
Équation différentielles linéaire d'ordre 2

Le but de ce TP est d'approcher par deux méthodes la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Question 1 : Résolution théorique. Soit l'équation différentielle :

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} t^2y''(t)-2y(t) & = & -\frac{3}{t} \\ y(1) & = & 0 \\ y'(1) & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Pour une fonction y dérivable d'un intervalle I de $R+^*$, dans $\mathbb{R}$ on pose $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Montrer que y est une solution de E si et seulement si Y est solution de l'équation différentielle

$$(\widetilde{E})\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t)+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2\frac{1}{t^2} & 0 \end{pmatrix}Y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{t^3} \end{pmatrix} \\ Y(1) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

2. Montrer que $\widetilde{E}$ possède une unique solution maximale, en déduire que E possède une unique solution maximale.
3. Montrer que la fonction $z : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est l'unique solution de E sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 2 : Une discrétisation simple

1. Écrire un DL_1 au point x de $f(x+h)-f(x)$.
2. Écrire un DL_2 au point x de $f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$.
3. On pose $h=\frac{1}{N}$, $t_n=1+nh$ et on décide d'approcher $y(t_n)$ par y_n, $y'(t_n)$ par $\frac{y_{n+1}-y_n}{h}$, et $y''(t_n)$ par $\dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}$. Montrer que l'on obtient alors :

$$(\widetilde{E})\left\{\begin{array}{rcl} y_0 & = & 0 \\ y_1 & = & h \\ y_{n+1} & = & 2y_n-y_{n-1}+\frac{2h^2}{t_n^2}y_n-\frac{3h^2}{t_n^3} \end{array}\right.$$

4. Écrire un code scilab permettant d'obtenir un vecteur `w` dont les coordonnées sont les y_n.
```
N=100; // Nombre de pas pour aller de 1 à 2
h=1/N;  // pas
t=[N:2*N]/N; //subdivision de 1 à 2 en N pas de longueur h
z=log(t)./t; // image de $t$ par la solution de l'équation différentielle
w(1)=0;w(2)=h;
```
Compléter le code, tracer la solution approchée entre 1 et 2, tracer la solution exacte en rouge.
5. On cherche à estimer l'erreur au point $t=2$ c'est à dire à comparer y_N avec $z(2)$, lorsque N augmente, pour cela on écrira une boucle sur N (par exemple de 10 à 200, et on tracera `log(w(N+1)-z(N+1))` en fonction de `log(N)`. La convergence semble de quel ordre ?

Question 3 : Méthode d'Euler. On se propose d'approcher la solution à l'aide du schéma d'Euler, en utilisant l'expression $\widetilde{E}$.

1. Quelle est l'expression de ϕ pour ce schéma ? On prendra $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour premier terme de la suite.
2. Approcher la solution entre 1 et 2 avec $N = 100$.
3. En vous inspirant de la méthode précédente, conjecturer l'ordre de la convergence.

Question 4 : Méthode de Runge-Kutta. On reprend l'étude précédente avec le schéma à un pas $u_{n+1} = u_n + h\phi(t, u, h)$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t,u,h) = \frac{1}{6}(l_1(t,u,h) + 2l_2(t,u,h) + 2l_3(t,u,h) + l_4(t,u,h)) \\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} l_1(t,u,h) = f(t,u) \\ l_2(t,u,h) = f(t+\frac{h}{2}, u + \frac{h}{2}l_1(t,u,h)) \\ l_3(t,u,h) = f(t+\frac{h}{2}, u + \frac{h}{2}l_2(t,u,h)) \\ l_4(t,u,h) = f(t+h, u + hl_3(t,u,h)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$