

Travaux dirigés sur ordinateur n°6 : Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

Le but de ce TP est d'approcher par différentes méthodes la solution d'une équation différentielle à l'aide de plusieurs schémas. Déroulement de la séance : Schéma d'Euler puis étude d'un schéma d'ordre 2.

Question 1 : Résolution théorique. Soit l'équation différentielle :

$$(E) \begin{cases} y'(t) &= 2t \cdot y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que pour approcher numériquement la solution d'une équation différentielle sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$:

$$(E) \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

pour chaque entier naturel N , on utilise une discrétisation de l'intervalle en posant $h = \frac{T}{N}$, $t_n = t_0 + nh$, $0 \leq n \leq N$ et

$$u_{n+1} = u_n + h\phi(t_n, u_n, h), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Le premier terme de la suite u_0 est donnée (il peut être différent de y_0).

Question 2 : Méthode d'Euler. On se propose d'approcher la solution sur l'intervalle $[0, 1]$, à l'aide du schéma d'Euler. Pour ce schéma on prend $\phi(t, u, h) = f(t, u)$. On prend avec les notations précédentes $u_0 = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$ et $h = \frac{1}{n}$.

1. Récupérer le code suivant euler1.sce sur la page d'Alexandre Mizrahi :

```
function z=f(t,y)
    z=2.*t.*y
endfunction

function U=euler(n)
    t=[0:n]/n;
    u(1)=1;
    for i=1:n;
        u(i+1)= // à compléter
    end;
    U=u
endfunction;
```

Compléter la ligne 9 pour obtenir le schéma d'Euler.

2. Soit g la solution de (E) . Déterminer g et écrire une fonction scilab g . Tracer sur un même schéma dans une première fenêtre graphique, avec deux couleurs différentes, les courbes de g et les $(t(i), u(i))$, $1 \leq i \leq 21$ pour $n = 20$.
3. On cherche maintenant à majorer l'erreur de discrétisation en fonction de n . Pour n fixé, on a des valeurs approchées $u_n(i)$, $1 \leq i \leq n+1$. On veut majorer $\varepsilon_n = \max_i |g(t(i)) - u_n(i)|$ c'est à dire l'écart maximal entre la solution vraie et la solution approchée au points de discrétisation. Pour n variant de 10 à 20, écrire un code scilab qui permet d'obtenir le vecteur e dont les coordonnées sont données par ces différences. Récupérer le code suivant euler2.sce sur la page d'Alexandre Mizrahi :

```

n=10:20;
e=[];
for i=n
    t=[0:i]/i;
    e=[e, //.... à compléter....
end;
xset("window",1)
plot2d(log(n),log(e),style=2)

```

Compléter le code pour définir e . Déterminer α tel que cette erreur soit en $O(\frac{1}{N^\alpha})$. Ce résultat était-il prévisible ?

Question 3 : Méthode du point du milieu. Dans cette question, il s'agit d'approcher la solution de (E) , à l'aide d'un autre schéma.

$$\begin{cases} u(n+1) &= u(n) + \frac{1}{N}f(t(n) + \frac{1}{2N}, u(n) + \frac{1}{2N}f(t(n), u(n))) \\ u(1) &= 1 \end{cases}$$

Reprendre l'étude de la question précédente avec ce schéma. On modifiera la ligne 8 du code euler1.sce et la ligne 5 du code euler2.sce. Pour les courbes, on prendra $N = 10$.