Analyse numérique
Troisième année de licence M
2009/2010

Travaux dirigés sur ordinateur n°**5** :
Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

---

Le but de ce TP est d'approcher par différentes méthodes la solution d'une équation différentielle à l'aide de plusieurs schémas. Déroulement de la séance : Schéma d'Euler puis étude d'un schéma d'ordre 2.

Question 1 : Résolution théorique. Soit l'équation différentielle :

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 2t\cdot y(t) \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que pour approcher numériquement la solution d'une équation différentielle sur l'intervalle $[t_0, t_0+T]$:

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

pour chaque entier naturel N, on utilise une discrétisation de l'intervalle en posant $h = \frac{T}{N}$, $t_n = t_0 + nh$, $0 \leq n \leq N$ et

$$u_{n+1} = u_n + h\phi(t_n, u_n, h),\ 0 \leq n \leq N-1$$

Le premier terme de la suite u_0 est donnée (il peut être différent de y_0).

Question 2 : Méthode d'Euler. On se propose d'approcher la solution sur l'intervalle $[0,1]$, à l'aide du schéma d'Euler. Pour ce schéma on prend $\phi(t,u,h) = f(t,u)$. Cela revient à prendre pour solution approchée en (t_k, y_k) un petit morceau de la tangente à la solution passant par ce point, on prend avec les notations précédentes $u_0 = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$ et $h = \frac{1}{n}$.

1. Récupérer le code suivant euler1.sce sur la page d'Alexandre Mizrahi :

```
function z=f(t,y)
 z=2.*t.*y
endfunction

function U=euler(n)
 t=[0:n]/n;
 u(1)=1;
 for i=1:n;
   u(i+1)= // à compléter
 end;
 U=u
endfunction;
```

   Compléter la ligne 9 pour obtenir le schéma d'Euler.

2. Soit g la solution de (E). Déterminer g et écrire une fonction scilab `g`. Tracer sur un même schéma dans une première fenêtre graphique, avec deux couleurs différentes, les courbes de g et les $(t(i), u(i))$, $1 \leq i \leq 21$ pour $n = 20$.

3. On cherche maintenant à majorer l'erreur de discrétisation en fonction de n. Pour n fixé, on a des valeurs approchées $u_n(i)$, $1 \leq i \leq n+1$. On veut majorer $\varepsilon_n = \max_i |g(t(i)) - u_n(i)|$ c'est à dire l'écart maximal entre la solution vrai et la solution approchée au points de discrétisation. Pour n variant de 10 à 20, écrire un code scilab qui permet d'obtenir le vecteur e dont les coordonnées sont données par ces différences. Récupérer le code suivant euler2.sce sur la page d'Alexandre Mizrahi :

```
n=10:20;
e=[];
for i=n
  t=[0:i]/i;
  e=[e,//.... à compléter....
end;
xset("window",1)
plot2d(log(n),log(e),style=2)
```

Compléter le code pour définir e. Déterminer α tel que cette erreur soit en $O(\frac{1}{N^\alpha})$. Ce résultat était-il prévisible ?

Question 3 : Méthode du point du milieu. Dans cette question, il s'agit d'approcher la solution de (E), à l'aide d'un autre schéma.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(n+1) & = & u(n) + \frac{1}{N} f(t(n) + \frac{1}{2N}, u(n) + \frac{1}{2N} f(t(n), u(n))) \\ u(1) & = & 1 \end{array} \right.$$

Reprendre l'étude de la question précedente avec ce schéma. On modifiera la ligne 8 du code euler1.sce et la ligne 5 du code euler2.sce. Pour les courbes, on prendra $N = 10$.