Analyse numérique
Troisième année de licence M
2010/2011

Travaux dirigés sur ordinateur n°**4** :
Calculs approchés d'intégrales ($\hookrightarrow$ **Q 3**)

Durant ce TP, on cherche à calculer une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour cela on écrit dans l'éditeur différentes fonctions...

Question 1 : Définir dans scilab une fonction `f` qui pour tout argument réel t renvoie $f(t) = \frac{4}{1+t^2}$ et qui pour toute matrice $M = (M_{i;j})$ renvoie la matrice $M = \big(f(M_{i;j})\big)$

Question 2 : Définir dans scilab une fonction `rectangle` qui pour tout argument entier n renvoie

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)$$

Cette somme correspond à la somme des aires de n rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur l'image par f du milieu de chaque segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.
Que valent `rectangle(3)` et `rectangle(50)` ?

Question 3 : On cherche dans cette question à estimer l'erreur commise par cette méthode d'intégration, pour cela on va tracer l'erreur commise par I_n en fonction de n.

1. Construire une matrice ligne `L`, de 91 colonnes contenant les valeurs des erreurs commises pour n variants entre 10 et 100 : $I_{10} - \pi, I_{11} - \pi, \ldots, I_{100} - \pi$.
2. Pour n variant entre 10 et 100, tracer les 91 points de coordonnées $(n; I_n)$.
3. Les points sont-ils alignés ?
4. En utilisant la fonction `log`, tracer $\ln|I_n - I|$ en fonction de $\ln n$, toujours pour n variant entre 10 et 100.
5. On trouve des points alignés, qui donne une relation de la forme $\ln|I_n - I| = a\ln n + b$. Donner une valeur approchée de a.
6. En déduire que $|I_n - I| = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$. Comparer au résultat du TD.

Question 4 : En modifiant `rectangle`, écrire une fonction `trapeze` qui calcule une valeur approchée de l'intégrale à l'aide de n trapèzes. Comparer `rectangle(100)-%pi` et `trapeze(100)-%pi`.

Question 5 : Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée de l'intégrale à l'aide de la méthode de Simpson : c'est la formule du cours mais en découpant l'intégrale en $n = 2m$ petits intervalles $[a_i; a_{i+1}]$:

$$J_n = \frac{1}{6m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(f(a_{2k}) + 4f(a_{2k+1}) + f(a_{2k+2})\Big) \qquad \text{avec} \quad a_k = \frac{k}{n}$$

On pourra réecrire la somme, pour n'évaluer que $n+1$ fois la fonction f. En traçant des courbes en fonction de n, conjecturer la vitesse de convergence de la méthode (c'est à dire trouver un équivalent simple de $|J_n - I|$).