Analyse numérique
Troisième année de licence M
2009/2010

Travaux dirigés sur ordinateur n°**4** :
Meilleur approximation polynômiale au sens de L_2

Le but de ce TP est de trouver pour une fonction f donnée, le polynôme Q de degré inférieur ou égal à N donné, qui est le plus proche de f sur $[0;1]$ au sens de la norme L_2 :

$$\forall P \in \mathbb{R}_N[X], \int_0^1 \big(f(x) - Q(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \big(f(x) - P(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$$

Pour aboutir à cela nous allons utiliser deux approches légèrement différentes, dans un premier temps nous allons juste utiliser la propriété caractéristique du projeté orthogonal de f sur $R_N[X]$ pour le produit scalaire défini par :

$$< f_1, f_2 >= \int_0^1 f_1(t) f_2(t) \,\mathrm{d}t$$

à savoir Q est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $f - Q$ soit orthogonal à tous les polynômes de $\mathbb{R}_N[X]$.

Dans un second temps nous allons utiliser une base orthonormée, pour déterminer le projeté orthogonal, Q. On prend pour les calculs la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+8x^2} \qquad \text{d'abord sur [0 ;1], puis sur [-1 ;1]}$$

Question 1 : Projection orthogonale

Soit Q le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question on prend $N = 1$, déterminer a et b tels que $Q = aX + b$.
2. Pourquoi Q s'écrit-il $\sum_{n=0}^N a_n X^n$?
3. Expliquez pourquoi $\forall k \in \{0, \dots, N\}, < Q, X^k >=< f, X^k >$.
4. En déduire un système de $N + 1$ équations linéaires vérifié par les $a_0, a_1, \dots, a_N$. On l'écrira à l'aide d'un produit matriciel, détailler les matrices $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(N+1,1)}(\mathbb{R})$:

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = B$$

5. La syntaxe de la fonction `intg`, qui permet le calcul approché d'une intégrale, est la suivante : `intg(a,b,h)`, le troisième argument est le nom d'une fonction définie précédemment à l'aide de la syntaxe `function ... endfunction` le premier et le second argument, sont les bornes d'intégration.

```
function y=f(x)
  y=(1.0)./(1.0+8.*x^2);
endfunction
```

Retrouver en utilisant les fonctions `intg` et `f` définie ci dessus la valeur approchée suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+8x^2} \,\mathrm{d}x \simeq 0,4352$$

Aller chercher le code suivant *L2.sce*sur la page d'Alexandre Mizrahi

```
clear
function y=f(x)
     y=1.0./(1+8.*x^2)
endfunction;
N=10
for i=0:N
    function y=fz(x)
       y=f(x).*x^(i)
    endfunction;
  b(i+1)=intg(0,1,....à compléter...);
end;
```

Expliquer lorsque $i = 0$ ce que vaut la fonction `fz`, puis pour $i = 1$? $i = 2$?

6. Comment doit-on compléter la définition de `b(i+1)` pour que `b(i+1)` soit égale au $B_{(i,1)}$ de la question 4.
7. On cherche à définir les coefficients de la matrice M définit à la question 4
   `for i=0:N, for j=0:N, M(i+1,j+1)=.... à compléter .........;end;end;`
8. Pour inverser une matrice carrée inversible M il suffit d'écrire `1/M`, résoudre le système de la question 4. Déterminer un vecteur *coe* dont les coefficients sont les coefficients de Q
9. A l'aide de `Q=poly(coe,'X','coef')`, qui permet de définir le polynôme d'indéterminée X dont les coefficients sont donnés par la matrice `coe`, on définit le projeté orthogonal Q. Représenter sur un même dessin, f et Q. Pour $N = 10$ puis pour $N = 3$.
10. Que fait la fonction :

```
function r=distance2(P)
   function m=no(x)
     m=(f(x)-horner(P,x)).^2
   endfunction,
   R=intg(0,1,no)
   r=sqrt(R)
endfunction,
```

Comparer distance2(P) lorsque $N = 4$ et lorsque $N = 10$.

Question 2 : Base orthonormée

Les polynômes de Legendre forment une famille orthogonale pour le produit scalaire de $L_2[-1, 1]$. Dans le cours nous avons vu qu'ils vérifiaient la formule de récurrence suivante :

$$nL_n(t) - (2n - 1)tL_{n-1}(t) + (n - 1)L_{n-2}(t) = 0$$

et que $L_0 = 1$ et $L_1(t) = t$. On va donc utiliser cette suite de polynômes pour approcher sur $\underline{[-1, 1]}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+8x^2}$:

1. Construire un vecteur L dont la ième coordonnée est le (i-1)ème polynôme de Legendre, pour cela on pourra utiliser l'instruction, `x=poly(0,'x')`, qui permet de définir `x` comme le polynôme x.
2. Construire un vecteur K dont la ième coordonnée est égale au (i-1)ème polynôme de Legendre, divisé par sa norme.
3. De façon général dans un espace euclidien E, $< \cdot, \cdot >$, si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E, comment peut-on exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base à l'aide du produit scalaire.
4. De façon général dans un espace euclidien E, $< \cdot, \cdot >$, si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_k})$ est une base orthonormée d'un sous espace vectoriel H, comment peut-on exprimer les coordonnées du projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur H dans cette base.
5. Déterminer Q_N.
6. Tracer le logarithme de la distance de Q_N à f en fonction de N pour $N \in [1; 15]$. Estimer l'ordre de grandeur de $\|Q_N - f\|_2$?