Analyse numérique
Troisième année de licence M
2009/2010

Travaux dirigés sur ordinateur n°**3** :
Interpolation

Question 1 : Interpolation de Lagrange

1. Pour définir un polynôme dans scilab, on utilise la fonction `poly`, avec la syntaxe suivante `poly(r,"X")`, ou `r` est une matrice ligne dont les éléments vont être les racines du polynôme ainsi créé et `X` sa variable. `X=poly(0,"X")` permet de définir le polynôme `X` puis d'en définir d'autre à l'aide d'opérations usuelles par exemple `P=poly(0,"X")`, `P=(X-1)*(X+1)`, donne le même résultat que `P=poly([-1,1],"X")`. La fonction `horner` permet d'évaluer un polynôme en un point avec la syntaxe `horner(P,7)` qui renvoie $P(7)$ la valeur de P en 7. Pour scilab un polynôme n'est pas une fonction.
   On définit les deux polynômes suivants
   `P1=poly([0,1],"X")`
   `Q1=P1/(horner(P1,0.5))`
   (a) Sans utiliser Scilab déterminer les racines de Q_1, que vaut Q_1 au point 0,5 ?
   (b) Définir de même un polynôme `Q0` dont les racines sont 0,5 et 1 et valant 1 an 0.
   (c) Définir de même un polynôme `Q2` dont les racines sont 0 et 0,5 et valant 1 an 1.
   (d) Définir dans scilab la fonction $f(x) = \frac{1}{1+8x^2}$.
   (e) Déterminer α_0, α_1 et α_2 pour que le polynôme $T = \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$ soit égal à f en 0, en 0,5 et en 1. (Q_0, Q_1, Q_2) s'appelle base de Lagrange associée aux points $(0; 0,5; 1)$.
   (f) Tracer à l'écran f et L.
   (g) Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ une famille de points, déterminer, à la main, la base de Lagrange $L_1, L_2, \dots, L_n$ associée à ces points c'est à dire la famille de polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que $L_i(a_j)) = \delta_{ij}$. Déterminer ensuite les coordonnées du polynôme d'interpolation de f en ces points dans cette base.
2. Aller chercher le fichier Lagrange sur la page d'Alexandre MIZRAHI.
   (a) Tracer la fonction f sur $[-1..1]$.
   (b) Compléter la fonction Lagrange, vérifier sur un exemple simple qu'elle fonctionne.
   (c) Compléter la fonction interpol, vérifier sur un exemple simple qu'elle fonctionne.

```
function y=f(x),
  y=1.0./(1+8.0.*(x.^2))
endfunction;


function Q=Lagrange(A,i)
// La fonction Lagrange reçoit un vecteur A et un entier i,
//  il renvoie le polynome de plus petit degré qui vaut 1 en A(i)
//et qui vaut 0 sur chacun des A(j) pour j différent de i.
  B=A
  B(i)=[] //(On supprime le ième terme de A, on appelle B cette nouvelle matr
  P=poly(B,"X")
  dominant=horner(P,A(i))
  Q=P// ......... à compléter  ......
endfunction
```

```
function S=interpol(A)
// La fonction interpol recoit une matrice et renvoie un polynome qui en
// chaque point de la matrice prend la valeur de la fonction f
   S=0;
   for i=1:length(A) // length(A) renvoie le nombre d'éléments de A
      S=S//+....à compléter.......;
   end;
endfunction;

x=-1:0.01:1;
y=f(x);
plot2d(x,y)
```

3. Tracer sur un même dessin f entre -1 et 1, ainsi que son polynôme d'interpolation aux points : $-1; -0,6; -0,2; 0,2; 0,6; 1$.
4. Tracer sur un même dessin f entre -1 et 1, ainsi que son polynôme d'interpolation aux points : $-1; -0,9; -0,8; -0.7 \ldots; 0,9; 1$.
5. Que remarque-t-on ? Appeler votre enseignant de travaux dirigés pour commenter vos dessins.

Question 2 : Interpolation de Lagrange, aux zéros du polynôme de Tchebychev

1. On construit un vecteur `che` dont le nième élément est le (n-1)ième polynôme de Chebychev on pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev (T_n).

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{k+2} = XT_{k+1} - T_k$$

```
che(1)=1;che(2)=poly(0,"X");for i=1:50..........................; end;
```

Représenter quelques-un de ces polynômes sur $[-1; 1]$. Quelle propriétés particulière du cours ont-ils ?

2. En utilisant le fait que $\forall x \in [-1; 1], T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, déterminer les n racines de T_n comprises entre -1 et 1.
3. Déterminer le polynôme d'interpolation de f associés aux 11 points de T_{11}. Tracer sur un même dessin f et T_{11}, on pourra après les avoir tracé sur $[-1, 1]$ les tracer sur $[-1, 2; 1, 2]$. On pourra aussi essayer avec 20 points et comparer avec l'interpolation de Lagrange pour des points régulièrement espacés.