Analyse numérique
Troisième année de licence M
2010/2011

Travaux dirigés sur ordinateur n°**2** :
Introduction à Scilab (suite 1) ($\hookrightarrow$ **Q 4**)

Question 1 : Petits rappels

1. Définir un vecteur `t` contenant tous les entiers de 0 à 200.
2. En déduire, à l'aide d'une homothétie et d'une translation, le vecteur `x` contenant 201 coefficients $-1, -0.99, -0.98, \dots 0.98, 0.99, 1$.
3. Définir un vecteur `y` contenant 201 coefficients : images des éléments de `x` par la fonction exponentielle.
4. Tracer en rouge la fonction exponentielle sur $[-1; 1]$.

Question 2 : L'horloge tic toc Une horloge permet de mesurer le temps d'exécution d'un code scilab, l'instruction `tic` démarre l'horloge, l'instruction `toc` affiche le temps écoulé depuis le dernier `tic`. On cherche à calculer la somme S des inverses du premier million d'entiers naturels strictement positifs. On va comparer la vitesse d'exécution entre un produit de matrice et l'utilisation d'une boucle for. On écrira chacun des codes dans l'éditeur.

1. Définir un vecteur `t` contenant tous les entiers de 1 à $n = 100000$.
2. Définir un vecteur `x` contenant tous les inverses des entiers de 1 à $n = 100000$.
3. Définir un vecteur `y` contenant un million de 1, on pourra utiliser la commande `ones(100000,1).`
4. Calculer S à l'aide de `x` et `y`.
5. On définit `s=0`, puis à l'aide d'une boucle 'for' on ajoute $\frac{1}{i}$ à s pour i variant de 1 à 100000.
6. A l'aide de deux horloges comparer la vitesse d'exécution de chacune des deux méthodes. L'une est environ cinquante fois plus rapide que l'autre.

Question 3 : La commande if Sa syntaxe est la suivante :

```
if condition then instructions,
elseif condition then instructions,
else instructions
end
```

où chaque `condition` est une valeur booléenne vrai ou faux
Essayer l'exemple suivant où `rand(n,m)` renvoie une matrice de n lignes et m colonnes de nombres compris entre 0 et 1 pseudo aléatoires uniforme sur $[0, 1]$. Expliciter les calculs effectués par scilab

```
s1=0;s2=0;
for i=rand(1,1000)
  if i<0.5 then s1=s1+1;
   else s2=s2+1;
  end;
end
[s1,s2]
```

On peut aussi sans utiliser de boucle 'for' tester directement `s3=sum(rand(1,1000)<0.5).`
Dans le même genre d'idée, on se propose de trouver une valeur approchée de $\frac{1}{2}\pi$ à l'aide de tirages aléatoires.

1. Définir une matrice `A` de réels pseudo aléatoires indépendants de loi uniforme ayant 2 lignes et $n = 100000$ colonnes.
2. Pour chacune de ces colonnes on cherche à savoir si le point de coordonnées les deux valeurs de cette colonne appartient à la boule unité (boule de centre 0 et de rayon 1), quelle inégalité doivent vérifier ces deux coordonnées ? à l'aide d'une boucle 'for' et d'une variable de comptage `s`, compter le nombre de points se trouvant dans le disque unité, comparer $\frac{s}{n}$ à $\frac{1}{4}\pi$. Expliquez rapidement.

3. (Peut etre sauté en première lecture) A l'aide d'une autre méthode retrouvons ce résultat. Définir la matrice `B`, dont les coefficients sont les carrés de la matrice `A`. Définir une matrice ligne `C`, somme des deux lignes de `B`. Comparer chaque élément de C à 1 puis sommer tous les vrai à l'aide de la fonction `sum`.

Question 4 : Dichotomie On cherche à approcher l'unique solution de l'équation $e^x = \frac{1}{x}$, pour cela on pose $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

1. Déterminer le plus petit N tel que $\frac{1}{2^N} < 10^{-4}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer en étudiant la fonction f qu'elle ne s'annule qu'en un seul point x_0.
4. Déterminer les signes de $f(\frac{1}{10})$ et $f(1)$, montrer que $\frac{1}{10} < x_0 < 1$.
5. On pose $a = \frac{1}{10}$ et $b = 1$, puis grâce à une boucle 'for' on va faire évoluer les valeur de a et b de la façon suivante pour $c = \frac{1}{2}(a + b)$, si $f(c) < 0$ alors $a = c$ sinon $b = c$, et ainsi de suite N fois.

Question 5 : Méthode du point fixe On reprend l'exemple du TD 1, pour trouver une valeur approchée de la racine de l'équation $\tan \beta = 2\beta$ pour $\beta \in [\frac{1}{4}\pi; \frac{1}{2}\pi]$.
A l'aide d'une boucle for déterminer une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

Question 6 : Méthode de Newton On reprend l'exemple du TD 1, pour trouver une valeur approchée de la racine de l'équation $\ln x^3 - x = 0$ pour $\alpha \in [1; 2]$.
A l'aide d'une boucle for déterminer une valeur approchée de β à 10^{-6} près.