Analyse numérique
Troisième année de licence M
2009/2010

Travaux dirigés sur ordinateur n°**1** :
Calculs approchés d'intégrales

Question 1 : Pour cette question un papier et un crayon suffisent, on ne demande pas d'utiliser scilab. Expliquer ce que fait le code suivant :

```
function y=f(x)
   y=4.0./(1+x.^2);
endfunction
```

Pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f sur $[0,1]$, on écrit une fonction scilab appelée `rectangle`, qui prend un argument n, et qui renvoie la somme des aires de n rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur l'image par f du milieu de chaque segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, c'est à dire une fonction qui calcule :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)$$

Lors de l'instruction `rectangle(3)`, déterminer à la main ce que scilab va calculer `x0`, `x`,et `s` pour chacun des passages dans la boucle `for`, et enfin z, représenter sur un dessin l'aire calculer par `rectangle(3)`.

```
function z=rectangle(n)
   x0=0:n-1;
   x=x0/n;
     s=0.0
     for i=x;
       s=s+f(i+1/2n)/n;
     end;
   z=s
endfunction
```

Question 2 : Soit f la fonction définie par $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$, on note I_n la valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la méthode des rectangles, avec n rectangles, on pourra utiliser le code précèdent qui se trouve sur la page web d'Alexandre Mizrahi avec le nom Rec (par exemple taper alexandre mizrahi dans google) . La valeur numérique de π s'écrit `%pi`.

1. Calculer la valeur approchée de I à l'aide de 100 rectangles. Comparer la à la valeur réelle de I, quelle est l'erreur ?
2. En simulant la boucle avec un papier et un crayon, exprimer les premiers termes de E défini par

   ```
   A=10:100;
   E=[];
   for n=A;
     E=[E,rectangle(n)];
   end;
   ```

3. Pour n variant entre 10 et 100, tracer I_n, valeur approchée de I par la méthode des rectangles avec n rectangles, en fonction de n.
4. Les points sont-ils alignés ?
5. Tracer $|I_n - I|$ en fonction de n.
6. En utilisant la fonction `log`, tracer $\ln|I_n - I|$ en fonction de $\ln n$.

7. On trouve une droite, qui donne une relation de la forme $\ln|I_n - I| = a\ln n + b$. Donner une valeur approchée de a.
8. En déduire que $|I_n - I| = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$. Comparer au résultat du TD.

Question 3 : En modifiant `rectangle`, écrire une fonction `trapeze` qui calcule une valeur approchée de l'intégrale à l'aide de n trapèzes. Comparer `rectangle(100)-%pi` et `trapeze(100)-%pi`.

Question 4 : Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée de l'intégrale à l'aide de la méthode de Simpson : c'est la formule du cours mais en découpant l'intégrale en $n = 2m$ petits intervalles $[a_i; a_{i+1}]$:

$$J_n = \frac{1}{6m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(f(a_{2k}) + 4f(a_{2k+1}) + f(a_{2k+2})\Big) \qquad \text{avec} \quad a_k = \frac{k}{n}$$

On pourra réecrire la somme, pour n'évaluer que $n+1$ fois la fonction f. En traçant des courbes en fonction de n, conjecturer la vitesse de convergence de la méthode (c'est à dire trouver un équivalent simple de $|J_n - I|$).