Analyse numérique
Troisième année de licence M
2010/2011

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Travaux dirigés sur ordinateur n°**1** : **Introduction à Scilab** ($\hookrightarrow$ **Q 5**)

Question 1 : Manipulation de nombres et de matrices
L'objet de base en scilab est la matrice, on en utilise tout le temps :
Ouvrez Scilab, effectuer les différentes opérations proposées, répondre aux éventuelles questions.

1. Affectation d'une variable par un entier : `a=3`↵ `a`↵
2. Affectation d'une variable par un flottant : `b=%pi`↵
3. Affectation d'une variable par un flottant complexe : `c=1+%i`↵
4. Des calculs : `a+5`↵ `c^2`↵ `sin(%pi)`↵
5. Affectation d'une variable par un vecteur : `u=[3,4,5,6]`↵
6. Que donne les calculs suivants : `2+u`↵ `3*u`↵ `u/10`↵ `exp(u)`↵ `u*u`↵ `u.*u`↵ `[u,10]`↵ `u'`↵ `u(3)`↵ `u(5)=10`↵ `u([2,3])`↵
7. Affectation d'une variable par une matrice : `M=[3,4;5,6]`↵
8. Concaténation : `N=[M,M]`↵ `P=[M;M]`↵ `Q=[M,[1;2]]`↵ `[M;[1,2]]`↵ `P(5,:)=[7,8]`↵
   Les deux points (:) permettent de prendre tous les éléments correspondants ...
9. Extraction : `M(2,2)`↵ `N(:,1)`↵ `N(2,:)`↵ `N(1,[2,3])`↵ `M(1,$)`↵ `N($-1,$-1)`↵ `$` représente le plus grand indice possible.
10. Comparer : `M*M`↵ `M.*M`↵ `M^3`↵ `M.^3`↵ `1/M`↵ `1./M`↵ `1.0./M`↵
    Les commandes (`*` `^` `/`) sont les opérations matricielles classiques, Les commandes (`.*` `.^` `./`) sont les opérations terme à terme correspondantes).
11. Si l'on termine la ligne par un point virgule, la commande est effectuée, mais le résultat n'est pas affiché. `S=[M,M;M,M];`↵ `S`↵
12. Vecteur d'entiers : `u=1:20`↵ puis `u=1:3:20`↵
13. Affectations en chaine : `a=20`↵ `b=a`↵ `a=5`↵ que vaut `b` ?

Question 2 :

1. Définir un vecteur `v` contenant tous les entiers de 1 à 100.
2. Calculer la somme $s_1 = \sum_{k=1}^{100} k^2$ en utilisant uniquement la transposition et le produit matriciel.
3. Calculer la somme $s_2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$ en utilisant uniquement la fonction puissance (^) et la fonction `sum` (pour avoir de l'aide sur une commande il suffit de taper `help sum`↵ ou `help -f sum`↵ pour une aide en français.
4. Calculer $s_3 = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$

Question 3 : L'éditeur La fenêtre scilab n'est pas très agréable, c'est pourquoi en général on utilise un éditeur, cliquer sur Applications-éditeur, créer un nouveau document dans l'éditeur, taper `a=20`↵ `d=a*a`, sauver votre fichier sous le nom qui vous convient, avec une extension .sce. Puis dans le menu "Exécuter" choisissez "Charger dans scilab" ou directement "Ctrl+L", vous pouvez aller lire le résultat dans la fenêtre Scilab.
Pour obtenir de l'aide sur une commande, vous pouvez aussi utiliser l'éditeur. Dans la suite il est fortement conseillé de travailler dans l'éditeur.

Question 4 : Graphisme

1. Dans une page de l'éditeur créer un vecteur ligne `t` de tous les entiers compris entre 0 et 1000.
2. Diviser par 100 chacun des termes de ce vecteur pour obtenir un nouveau vecteur `x` contenant une subdivision de l'intervalle $[0, 10]$ par pas de 0.01.

3. Définir un vecteur `y=sin(x)` contenant 1001 valeurs : $[\sin(0); \sin(0.01); \sin(0.02); \ldots ; \sin(10)]$, la fonction `plot2d` permet de tracer des points reliés par des segments avec la syntaxe suivante : `plot2d([x1,x2,...,xn],[y1,y2,...yn],style=2)` trace les points de coordonnées $(x1, y1)$, $(x2, y2)$, etc... avec la couleur n°2 (bleu). Tracer la fonction sinus sur l'intervalle $[0; 10]$. N'oubliez pas les points virgule en fin de ligne pour ne pas avoir l'affichage de toutes les coordonnées.
4. Définir un vecteur `z` contenant les images des éléments de `x` par la fonction cosinus puis tracer cette fonction cosinus en rouge (style=5) sur le même dessin.
5. Effacer la fenêtre graphique avec la fonction `clf();` puis tracer le cercle unité à l'aide de la paramétrisation classique en sinus et cosinus, on utilisera `y` et `z`.

Question 5 : [Boucle for]
Sa syntaxe est la suivante `for variable=expression, instruction, ,instruction, end` où `expression` est un vecteur ligne, `variable` prend alors toutes les valeurs de ce vecteur à tour de rôle et scilab effectue les instructions qui suivent avec chacune des valeurs.
Essayer l'exemple `for i=[1,2,3,4] q(i)=i^2, end↵ q↵`

1. Soit (u_n), la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2-2}{2u_n}$ (c'est la suite de Newton associé à la fonction $f(x) = x^2 - 2$). Calculer u_6 puis $u_6 - \sqrt{2}$.
2. Retrouver la somme s_1 de la question 2, à l'aide d'une boucle for, on utilisera une variable de sommation s et une boucle sur une variable i variant de 1 à 100.
3. Construire à l'aide d'une boucle 'for' un vecteur ligne `F` contenant les 100 premières valeurs de la suite de Fibonacci définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, on pourra partir de `F=[1,1]`.
4. Soit la suite $(v_n)_n$ définie
$$(P) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = 1 + \frac{14v_n-24}{v_n v_{n+1}} \\ v_0 = \frac{5}{2}\ \ v_1 = \frac{13}{5} \end{cases}$$
Afficher les valeurs de v_n pour n variant entre 40 et 50, quelle limite la suite $(v_n)_n$ semble-t-elle avoir ?
Afficher les valeurs de v_n pour n variant entre 200 et 210, quelle limite la suite $(v_n)_n$ semble-t-elle avoir ?

Question 6 : Suite de la question 4

1. On va chercher à calculer une valeur approchée de la dérivée de la fonction sinus, pour cela on approche $f'(x)$ par $\dfrac{f(x+0.01)-f(x)}{0.01}$, définir un vecteur `u` qui prend les valeurs correspondantes pour $x = 0$, $x = 0.01$, $x = 0.02$, etc... jusqu'à $x = 9.99$, on pourra pour cela utiliser des commandes du type `x([1,$-1])` qui renvoi le vecteur `x` auquel on a retiré la dernière coordonnée, représenter cette approximation ainsi que la fonction cos.
2. On cherche à approcher la dérivée seconde de la fonction sinus en utilisant la même méthode que précédemment mais en partant de notre fonction dérivée approchée représentée par le vecteur u, on définit donc un vecteur `v` qui approche la dérivée seconde de sin, tracer la différence entre sin'' et sa fonction approchée, vous devriez trouver une erreur maximale observée de l'ordre de 0.01.

Question 7 : En fait la suite (v_n) de la question 5.4 converge vers 3 : pour comprendre sa construction répondre aux questions qui suivent

1. Soit E l'espace vectoriel de dimension 3, des suites vérifiant pour tout entier n l'égalité : $u_{n+3} = u_{n+2} + 14u_{n+1} - 24u_n$.
2. Déterminer une base B de E de la forme $\{(r_1^n)_n, (r_2^n)_n, (r_3^n)_n\}$ où les r_i sont des réels à déterminer.
3. Pour une suite $(u_n)_n$ de (E) qui ne s'annule pas, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, étudier les limites possibles de la suite $(v_n)_n$.
4. Déterminer les coordonnées dans la base B de l'unique suite de E vérifiant $u_0 = 2$; $u_1 = 5$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$, on note dorénavant $(u_n)_n$ la suite ainsi définie, montrer qu'elle ne s'annule pas déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ correspondante ?
5. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est définie par
$$(P) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = 1 + \frac{14v_n-24}{v_n v_{n+1}} \\ v_0 = \frac{5}{2}\ \ v_1 = \frac{13}{5} \end{cases}$$
6. Expliquer le phénomène.