Troisième Année de Licence M
Analyse Numérique
2009/2010

Contrôle No 2

Exercice 1 : Question de Cours
Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle pour $t \geq 0$:

$$y'(t) = (1 + t^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}, \quad y(0) = 0.$$

1. Montrer que la fonction $f(t, y) = (1 + t^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$ est Lipschitzienne de rapport $L \leq 1$ par rapport à y uniformément en t.
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution locale.

Exercice 3 : On veut calculer une valeur approchée d'une fonction f en un point y de $[-1, 1]$ en utilisant les polynômes de Tchebichev. On rappelle la relation de récurrence :

$$(\mathbf{1}) \begin{cases} T_l(y) = 2y\,T_{l-1}(y) - T_{l-2}(y), \ l \geq 2 \\ T_1(y) = y \text{ et } T_0(y) = 1 \end{cases}$$

On note $y_j = cos(\frac{2j+1}{2n+2}\pi), \quad j = 0, 1, ..., n$ et $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ 0 sinon.
La condition de pseudo-orthogonalité des polynômes de Tchebichev s'écrit

$$\sum_{j=0}^{n} T_l(y_j)T_k(y_j) = \frac{n+1}{2}\delta_{l,k}(1 + \delta_{l,0}) \quad (\mathbf{2}).$$

1. On approche f par

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(y) \quad (\mathbf{3}).$$

   Montrer en utilisant $(\mathbf{2})$ que :

$$a_k = \frac{2}{(n+1)(1 + \delta_{l,0})} \sum_{j=0}^{n} T_l(y_j) f(y_j) \quad (\mathbf{4}).$$

2. Application numérique : on prend $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n = 10$ et $y = 0.6$. Ecrire un script dans lequel :
   (a) on calcule $T_l(y_j)$ ainsi que $T_l(y)$ $(l = 0, ..., n)$ et $(j = 0, ..., n)$ à l'aide de (1)
   (b) on calcule a_l $(l = 0, ..., n)$ à l'aide de (4).
   (c) on calcule $f(y)$ qui est la valeur recherchée par (3).