NOM :
Prénom :
87; 98

Licence Parcours M
troisième année
2009/2010

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Contrôle continu n°**1 (16 Février 2010)**, Analyse numérique

Les trois premiers exercices se traitent sans documents, ni machine, pour les 3 derniers les documents et l'utilisation d'internet sont autorisés. Le travail est individuel du début à la fin, vous pouvez utiliser des bouts de codes ou des corrections de TP se trouvant sur la page d'Alexandre MIZRAHI. L'énoncé doit être rendu avec les copies.

Exercice 1 : Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 2 : Déterminer le polynôme de meilleure approximation uniforme d'ordre 1 de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[1;4]$.

Exercice 3 : Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0)=0$ et $f(1)=0$.

1. Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Montrer que la suite $(P_n(0))$ tend vers 0.
3. En déduire une suite de polynômes dont 0 est racine qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. Montrer qu'il existe une suite de polynômes dont 0 et 1 sont racines qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 4 :

1. Écrire un code scilab permettant d'obtenir la matrice colonne $[98\ \ 99\ldots\ \ 198]$.
2. Écrire un code scilab permettant d'obtenir la matrice ligne $[198^3\ \ 199^3\ldots\ \ 298^3]$.
3. Écrire un code scilab permettant d'obtenir le polynôme
$$P=\sum_{k=98}^{148}k^3X^k$$
4. Donner alors une valeur approchée de $P(0,9)$.

Exercice 5 : On utilise le code suivant pour construire un vecteur scilab `L`, dont chaque coefficient est un polynôme, ces différents polynôme sont construits à l'aide d'une formule de récurrence, notons P_i le ième polynôme ainsi défini. Ainsi $P_1=1$ et $P_2=X$.

```
X=poly(0,"X")
L=[1,X]
for m =3:50
  n=m-1
  L(m)=(2*n-1)/n*X*L(m-1)-(n-1)/n*L(m-2)
end;
```

1. Déterminer P_8.
2. Déterminer la relation de recurrence qui lie les P_i.
3. Déterminer une valeur approchées de $\int_{-1}^{1}e^tP_8(t)\,\mathrm{d}t$. On pourra utiliser l'aide ou internet pour manipuler la fonction `integrate`.
4. Déterminer le polynôme $T(X)=\sum_{k=1}^{8}\sqrt{2k+1}\int_{-1}^{1}P_k(t)e^t\,\mathrm{d}t\ P_k(X)$.
5. Tracer sur une même courbe la fonction exponentielle et le polynôme T entre -1 et 1.
6. Tracer la fonction $exp-T$ entre -1 et 1.

Exercice 6 : Soit la fonction $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer la valeur exacte de $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.
2. On note I_n la valeur approchée de I à l'aide de la méthode des rectangles qui utilise n rectangles et qui prend la valeur de f au 2/3 de chacun des intervalles : par exemple la formule pour deux rectangles sur l'intervalle $[0,1]$, donne $I_2=\frac{1}{2}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{2}f(\frac{5}{6})$.
   (a) Pour la fonction f de l'exercice, faire un dessin représentant I_3 comme une aire.
   (b) Écrire la formule avec n rectangles sur $[0,1]$.
   (c) Calculer à l'aide de scilab I_{87}, on se limitera à donner la valeur trouvée avec les 5 premières décimales exactes.
   (d) Pour n variant entre 50 et 150 de 10 en 10, représenter $\ln|I_n-I|$ en fonction de $\ln n$. Conjecturer une valeur α telle que $|I-I_n|=O(\frac{1}{N^\alpha})$, on donnera le code scilab utilisé, puis on détaillera la méthode.