Exercices de Mathématiques

UE : MS3-I

Licence de sciences 2ème année

Parcours informatique

Parcours physique

8 février 2006

Alexandre MIZRAHI

Programme des travaux dirigés

Programme détaillé du cours

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$
   (a) Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, boule de centre M_0 et de rayon r : $B(M_0; r)$
   (b) Suites dans $\mathbb{R}^2$, convergence.
   (c) Définitions de la frontière d'un ensemble A : ∂A.
   (d) Définition d'ouvert(si $\partial A \cap A = \varnothing$), fermé(si $\partial A \subset \partial A$), intérieur, adhérence, borné, compact de $\mathbb{R}^2$ (ce sont les fermés bornés).
   (e) Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{R}^2$.
   (f) Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, représentation graphique, définition séquentielle de la continuité. Opérations algébriques, notation de landau.
   (g) Fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. Différentiabilité des fonctions de deux variables
   (a) Dérivées partielles, interprétation géométrique.
   (b) Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, développement limité d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$. Notation de la différentielle $\mathrm{d}f$.
   (c) Opérations algébriques, composition pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   (d) Définition de maximum, minimum, extremum, local, global.
   (e) Lien entre extremum et point critique.
   (f) Dérivées partielles secondes, énoncé de Schwartz (admis), DL_2 (admis).
3. Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
   (a) Continuité et classe $\mathcal{C}^1$ à l'aide des fonctions coordonnées.
   (b) Dérivée partielle, écriture matricielle, DL_1.
   (c) Jacobien, interprétation géométrique.
   (d) Composition, définition de difféomorphismes, exemples, dessins.
4. Courbes
   (a) Graphes de fonction, courbes paramétrées, et courbes définies par une équation.
   (b) Pour chacune des trois définitions, définition de la tangente.
   (c) Maximum d'une fonction définie sur une courbe (courbes paramétrées et peut-être équation avec fonctions implicites intuitif).
   (d) Longueur d'une courbe paramétrée : $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t$.
5. Intégrales doubles
   (a) Le cours est très intuitif et ne contient pas de preuve, l'introduction se fait avec un pavage du plan à l'aide de petits rectangles.
   (b) Théorème de Fubini.
   (c) Théorème du changement de variable (interprétation géométrique), cas du passage en polaire.
6. Intégrales généralisées
   (a) Pour des fonctions continues par morceaux sur $[a; b[$ on regarde la limite en b de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Convergence, convergence absolue.
   (c) Opérations algébriques pour la convergence.
   (d) Pour les fonctions positives, équivalence entre F bornée et l'intégrale converge.
   (e) Critère de convergence : convergence absolue, majoration, équivalence.
7. Intégrales dépendant d'un paramètre
   (a) Intégrale dont une borne dépend de la variable.
   (b) Intégrale sur un segment : Continuité, dérivabilité, intégrale.
   (c) Intégrale définie sur un intervalle quelconque : propriété de domination.
   (d) Introduction aux théorèmes de continuité et de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale généralisée.
8. Séries numériques
   (a) Rappel sur les suites.
   (b) Convergence, convergence absolue.
   (c) Critère de convergence pour les séries à termes positifs : majoration, équivalent, D'Alembert, Cauchy.
   (d) Séries de Riemann.
   (e) Séries alternées.
   (f) Vitesse de convergence d'une série numérique.
   (g) Produit de Cauchy.
9. Suites et séries de fonctions
   (a) Convergence simple pour les suites de fonctions, convergence normale (CN) pour les séries de fonctions.
   (b) Théorème sur la continuité de la somme d'une série pour la CN (admis), puis intégration. Dérivée de la somme d'une série pour la CN.
10. Séries entières
   (a) Définition du rayon de convergence comme borne supérieure, intervalle et disque de convergence.
   (b) Continuité, intégrale, dérivabilité.
   (c) Applications à la combinatoire.
11. Séries de Fourier
   (a) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\,\mathrm{d}t; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
   (b) Utilisation de la périodicité et de la parité.
   (c) Théorème de Dirichlet(admis), Théorème de Parseval(admis).

Topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1 : Soit (M_n) la suite définie par $M_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right), n\ln\frac{n}{n+1}\right)$.
Déterminer la limite de (M_n) si elle existe.

Exercice 2 : Soit (M_n) la suite définie par $M_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$.
Étudier la convergence de (M_n), puis la limite de $(\|M_n)\|)$.

Exercice 3 : Soit (N_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$, montrer que si (N_n) converge vers N alors $(\|N_n\|)$ converge vers $\|N\|$. La réciproque est-elle vrai ?

Exercice 4 : Représenter chacun des ensembles suivants, puis déterminer sa frontière, son intérieur et son adhérence. Dire si c'est un ouvert. Dire si c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
2. $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x > 1\}$.
3. $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; y = 2\}$.
4. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x + y \leq 2\}$.

Exercice 5 : Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que F et son complémentaire ont même frontière.
Montrer que F est fermé ssi le complémentaire de F est ouvert.

Exercice 6 : **[dur]** Soient A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 \in \mathbb{R}^2$, on définit la distance de M_0 à l'ensemble A par $d(M_0, A) = \inf\{\|M_0 - M\|, M \in A\}$.

1. Représenter $M_0 = (3,2)$ et $B =]-2,1[\times[-1,1])$, déterminer sans justification $d\big(M_0, B)$.
2. Représenter $M_0 = (0,0)$ et $B = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2, st = 1\}$, déterminer sans justification $d\big(M_0, B)$.
3. Montrer que $M_0 \in \overline{B}$ ssi $d(M_0, B) = 0$.
4. Montrer que si B est compact, alors il existe $N_0 \in B$ tel que $\|N_0 - M_0\| = d(M_0, B)$.

Exercice 7 : Pour chacune des formules suivantes déterminer l'ensemble de définition, le représenter. Montrer que les fonctions ainsi définies sont continues sur leur ensemble de définition. On utilisera les théorèmes du cours avec précision.

1. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.
2. $g(x;y) = \sqrt{x+y}$.
3. $h(x;y) = e^{x/y}\sin\frac{1}{x}$.

Exercice 8 : Soit $M = (x,y)$, montrer que : $xy = o(\|\overrightarrow{OM}\|)$ au voisinage de 0.

Différentiabilité des fonctions de deux variables

Exercice 9 : Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*, f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Exercice 10 : Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*, f(x,y) = \text{arctan}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Exercice 11 : Déterminer A l'ensemble des couples $(x;y)$ pour lesquels la formule $\arccos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ est bien définie. Représenter dans le plan l'ensemble A. Déterminer les dérivée partielles de la fonction f définie par cette formule en tout point de l'intérieur de A.

Exercice 12 : Montrer que la fonction f définie par $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}\ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}+y^4\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on ne fera aucun calcul.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+y^2-4$.
(a) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les ensembles
$L_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)=0\}$ et $L_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)=5\}$.
(b) Représenter dans l'espace muni d'un repère orthonormé le graphe de f,

$$\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z=f(x,y)\}$$

(c) En écrivant un DL_1 de f en $(1;2)$, déterminer le plan tangent à Γ en $(1;2;1)$.

Exercice 14 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $F:I\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=f(t^2,t+\cos t)$ est dérivable et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 15 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $F(x,y)=f(x^2+y^2)$. Montrer que, pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$, on a

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0.$$

Exercice 16 : Des notations casse pied, soit $f(x,y)=x^2+\dfrac{x}{y^2}$, déterminer :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,2);\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,x);\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x);\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(y,y);\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x);\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x);\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,x);\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)$$

sol : $25/4; 2x+1/x^2; 2x-1/x^2; 2y+1/y^2; 2-2/x^3; 2; -2/x^3; 4/x^3$

Exercice 17 : [dur] Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $y\in\mathbb{R}$, tout $t\in\mathbb{R}_+^*$,

$$f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y).$$

(a) Montrer qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ et homogène de degré $\alpha\neq 0$ a des dérivées partielles homogènes de degré $\alpha-1$.
(b) Soit f une fonction homogène de degré α et de classe C^1. Montrer que

$$(*)\qquad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f.$$

(c) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $(*)$. En étudiant $g(t)=t^{-\alpha}f(tx,ty)$, montrer que f est homogène de degré α.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-x^4$.

1. Montrer que f ne possède pas de maximum global.
2. Montrer que f ne possède pas de minimum global.
3. Montrer que si f possède un extremum local, ce ne peut être que en 0.

4. **[dur]** En factorisant une partie de l'expression de f montrer que f ne possède pas d'extremum local en 0.

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - x^4$; $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}})$, et $B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}})$.

1. Montrer que f ne possède ni maximum global, ni minimum global.
2. Montrer que si f possède des extrema locaux, ils se trouvent soit en 0 soit en A soit en B.
3. En factorisant une partie de l'expression de f montrer que f possède un minimum local en 0.

Exercice 20 : Soit f la fonction définie par $f(x;y) = x^2 - xy + y^2 + y$ sur le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Montrer, sans les déterminer, que f possède sur D un maximum global M et un minimum global m.
2. Déterminer l'unique point de $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$ où f peut posséder un extremum local.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur la frontière de D.
4. Déterminer m et M.

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 21 : Soit Φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\Phi(x,y) = (x+y; x-y)$. Montrer que ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'image du carré de sommet $[1;1]; [-1;1]; [-1;-1]; [1;-1]$?

Exercice 22 : Soit Φ définie de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par $\Phi(x,y) = (x+y; y^2)$.

1. Déterminer $U = \Phi\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
2. Montrer que Φ est un difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans U.
3. Soit $C = \{(x,y); 1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$, représenter C et son image par Φ.
4. Calculer le Jacobien de Φ.
5. Quelle est la zone du carré C qui est la plus "étirée" par Φ, celle qui est la moins "étirée" ?

Exercice 23 : Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal, les champs Φ; Ψ et χ

$$\Phi(x;y) = (x;y),\ \Psi(x;y) = (x; x+y),\ \chi(x;y) = (x^2; x+y)$$

Courbes du plan

Exercice 24 : Représenter dans un repère orthonormé les courbes paramétrées suivantes :

1. $(x(t); y(t)) = (\cos t; 2\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. $(x(t); y(t)) = (\cos^2 t; 2\sin^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $(x(t); y(t)) = (1 - t^2; 2t^2 + t + 1)$, $t \in [-1; 1]$.

Exercice 25 : Paramétrer les courbes

1. Le segment $[A; B]$ avec $A = (0;0)$ et $B = (1;2)$.

2. Le segment $[C;D]$ avec $C=(1;-2)$ et $D=(-1;3)$.
3. Le demi cercle de centre 0 de rayon 2 d'extrémité $(0;2)$ et passant par $(2;0)$.
4. $\Gamma=\{(x;y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\,;3x+y^2=1\}$

Exercice 26 : Soit C la courbe d'équation : $x^2+4y^2=1$.

1. Paramétrer C.
2. Déterminer la tangente à C aux points d'intersections avec la première bissectrice $(y=x)$.

Exercice 27 : On rappelle que ch$x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, et sh$x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

1. Montrer que $\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$.
2. Paramétrer chacune des branches de l'hyperbole d'équation $y^2-x^2=1$.

Exercice 28 : On fait rouler une roue de rayon 1, et on s'intéresse à la trajectoire d'un point placé sur le bord de la roue qui touche le sol au début du mouvement, en (0 ;0).

1. Montrer que l'on peut paramétrer cette trajectoire par $\begin{cases} x(\theta)=\theta-\sin\theta \\ y(\theta)=1-\cos\theta \end{cases}$
2. Déterminer la tangente à la trajectoire lorsque le point est à la hauteur du centre de la roue.
3. Déterminer la longueur parcourue par le bord de la roue entre le moment ou elle touche le sol jusqu'au moment ou elle retouche le sol. sol : 8

Exercice 29 : Déterminer le maximum de la fonction f définie par $f(x,y)=xy$ sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. sol : 1/2

Exercice 30 : Déterminer le maximum de la fonction f définie par $f(x,y)=x^2+y$ sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. sol : 5/4

Intégrales doubles

Exercice 31 : Soit D le disque unité, justifier sans aucun calcul l'encadrement suivant :

$$0\leq\iint_D\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq 4\pi\ln 5$$

Exercice 32 : Pour chacun des domaines suivants, calculer l'intégrale double :

$$I_i=\iint_{D_i}x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. D_1 est le triangle : $(0;0),(1;0),(0;1)$. sol : $\frac{1}{60}$
2. D_2 est le triangle : $(0;1),(0;-1),(1;0)$. sol : 0 . sol : $\frac{97}{60}$
3. D_3 est le demi disque $y>0$ et $x^2+y^2<1$.
4. D_4 est le disque de centre $(0;1)$ et de rayon 2.

Exercice 33 : Soit D le triangle : $(0;1),(1;2),(2;4)$, calculer $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 34 : Soit $a>0$, montrer que :

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Exercice 35 : Soit D le disque de centre O et de rayon a, calculer

$$\iint_D \frac{1}{a^2+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

sol : $\pi \ln 2$

Exercice 36 : Soit D le domaine défini par les inégalités :

$$0 \leq x \leq 1;\quad 0 \leq y \leq 1 \quad x^2+y^2 \geq 1;$$

Représenter D puis calculer $I = \displaystyle\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ sol : $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\pi$, découper l'intégrale sur le disque et le carré

Exercice 37 : Soit D une plaque plane, $\sigma : D \to \mathbb{R}^+$, une fonction appelée densité superficielle de la plaque. On appelle masse de la plaque la quantité M_D et le centre d'inertie de D le point G_D définis par :

$$M_D = \iint_D \sigma(x;y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OG_D} = \frac{1}{M_D}\iint_D \sigma(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. Calculer la masse du disque de centre 0 de rayon 1, dont la densité superficielle est donnée par

$$\sigma(M) = OM^2$$

   sol : $\pi/2$

2. Déterminer le centre d'inertie d'un demi disque homogène (σ constant).

Exercice 38 : Représenter et calculer l'aire du domaine :

$$\Delta = \{(x;y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 ; 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2;\ 3 \leq xy \leq 5\}$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{y}{x}$; $v = xy$. sol : $\ln 2$

Intégrales généralisées

Exercice 39 : Calculer lorsqu'elles convergent les intégrales généralisées suivantes :

$$a)\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x;\ \ b)\int_0^\infty x^3e^{-x}\mathrm{d}x;\ \ c)\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$d)\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x;\ \ e)\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 40 : Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+x+1}}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1+\sqrt{t})^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t \qquad \int_1^{\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \qquad \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \qquad \int_1^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

Exercice 41 :

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \ln\left(x^2+1\right) \mathrm{d}x$ diverge.
2. Montrer que l'intégrale $\int_2^\infty \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x$ converge.
3. Montrer que l'intégrale $\int_1^2 \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x$ converge.
4. Calculer l'intégrale $\int_1^\infty \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x$. sol : $-\pi/2-\ln(2)$

Exercice 42 : **[dur]** On pose :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right) \mathrm{d}t, \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos(t)\right) \mathrm{d}t, \text{ et } \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(2t)\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que I, J et K sont convergentes puis que $I=J=K$, on pourra utiliser les changements de variables $x=\frac{\pi}{2}-t$ et $y=\pi-t$.
2. Calculer $I+J$, en déduire I et J. sol : $-\frac{\pi}{2}\ln 2$

Exercice 43 : Étudier la convergence de

$$I(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}$$

et calculer $I(1)$. sol : $\frac{1}{2}\pi$

Fonctions définie par une intégrale

Exercice 44 :

$$F(x)=\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$$

1. Rappeler les ensembles de définition des fonctions $\arcsin$ et $\arccos$.
2. Pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ calculer $F'(x)$.
3. Montrer que $F(-x)=F(x)$ et que $F(x+\pi)=F(x)$.
4. Calculer $F(0)$ en déduire une formule pour $F(x)$.

Exercice 45 : On définit les fonctions suivantes :

$$h(t)=e^{-t^2};\ \ H(x)=\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t;\ \ G(x)=\big(H(x)\big)^2;\ \ f(x,t)=\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2};\ \ F(x)=\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer G' et F', montrer que $F+G$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $(F+G)(0)$.
3. Montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ 0\leq F(x)\leq e^{-x^2}$$
4. Montrer l'existence et déterminer la limite de F en $+\infty$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. sol : $\sqrt{\pi}/2$

Exercice 46 : Lemme de Riemann Lebesgue
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t=0$$

En utilisant la propriété P suivante, montrer que le résultat reste vrai pour les fonctions continues. Si f est continue sur $[0;1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction f_n de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\sup_{x\in[0;1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Exercice 47 : Fonction Γ

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\Gamma(1) = 1$ puis que pour tout n entier positif on a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$.
2. Montrer que f est deux fois dérivables sur tout intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Séries numériques

Exercice 48 : Calculer les sommes des séries suivantes en montrant leur convergence :

$$A = \sum_{k=2004}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)};\quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k};\quad C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k};\quad D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}};$$

Pour le A on pourra utiliser une décomposition en éléments simples et pour le C utiliser le B.

Exercice 49 : Étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum \frac{n}{n^3+3n}$

$b) \sum \frac{n^7-6n^2-21}{n^8+31n}$

$c) \sum \frac{n^7}{2n-3n^9}$

$d) \sum \frac{\sin n}{n^2}$

$e) \sum \frac{n}{n^2+\cos n}$

$f) \sum \frac{1}{n^3+n\cos n}$

$g) \sum \sin\frac{1}{n^2}$

$h) \sum \sin n$

$i) \sum \cos\frac{1}{n^2}$

$j) \sum \frac{n}{2^n}$

$k) \sum \frac{n^4-n^3}{2^n+3^n}$

$l) \sum \ln\frac{n+1}{n}$

$m) \sum \cos\frac{1}{n} - n\sin\frac{1}{n}$

$n) \sum \frac{\ln n}{n^3}$

$o) \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+3n}$

$p) \sum \frac{1}{(2n+3)(n+7)}$

$q) \sum \frac{3+(-1)^n}{n}$

$r) \sum \frac{1+n}{n^3(n+\ln n)}$

$s) \sum \frac{n^3-n^2+2}{(1+n^2)2^n}$

$t) \sum \frac{1}{2n(3n-7)}$

$u) \sum \frac{2^n-n}{3^n}$

$v) \sum \frac{n^2-7n+3}{n^5-6n^2-1}$

$w) \sum \frac{1+n}{3^n-2}$

$x) \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 50 : Étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

$b) \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$c) \sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$d) \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}$

$e) \sum \frac{n!}{n^7 2^n}$

$f) \sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

$g) \sum \frac{(-1)^n}{2n+\cos n}$

$h) \sum \sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 51 : Déterminer les valeurs des paramètres pour lesquels la série suivante converge :

$$\sum \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$$

Exercice 52 : Soit (a_n) une suite réelle, positive, on pose $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.
Montrer que $\sum a_n$ converge ssi $\sum b_n$ converge.

Exercice 53 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente, étudier la convergence des séries :

$$\sum u_n^2; \quad \sum \ln(1+u_n); \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}; \quad \text{on pourra montrer que } \forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Exercice 54 : [dur] Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\ \Gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

1) Calculer $S_n,\ \Sigma_n,\ R_n,\ \Gamma_n$ pour $a_n = 2^{-n}$ et $b_n = 2^{-n} + 3^{-n}$, comparer S_n et Σ_n puis R_n et Γ_n
2) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $R_n \sim \Gamma_n$ au voisinage de $+\infty$.
3) Montrer que si $\sum a_n$ diverge alors $S_n \sim \Sigma_n$ au voisinage de $+\infty$.
4) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n^2)$, montrer que (u_n) tend vers 0, déterminer α tel que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ ait une limite finie non nulle. A l'aide d'un télescopage déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 55 : [dur] (Avec l'aide d'une calculatrice)
Considérons la série de somme partielle $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k^2+1}$, on pose $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ le reste et S la somme de la série.
1) Pour une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$, f montrer que

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2) En déduire un encadrement de R_n.
3) En déduire un $n \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq 10^{-4}$.
4) Montrer qu'il existe a et b tels que

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + t_n,$$

avec $0 \leq t_n \leq n^{-4}$ pour $n \geq 3$.
5) Montrer que $0 \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} t_k \leq \frac{1}{3n^3}$.
6) Calculer

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

7) Montrer à l'aide des questions précédentes que le calcul de S_{15} permet le calcul d'une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Vitesse de convergence

Exercice 56 : Soit $\alpha > 1$, on veut déterminer la vitesse de convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Tracer la fonction définie par $f(t) = t^{-\alpha}$ sur l'intervalle $[n; n+1]$, déterminer un encadrement de l'aire de la surface $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | n < x < n+1; 0 < y < f(x)\}$, à l'aide de l'aire de deux rectangles.
2. En déduire que
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
3. En déduire un encadrement de $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
4. En déduire l'équivalent suivant :
$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$
La convergence est-elle lente, géométrique, rapide ?
5. Accélération de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. On pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$; $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (a) Déterminer un équivalent de R_N.
   Montrer que la suite définie par $u_n = S_n + \frac{1}{n}$ converge vers S plus vite que (S_n).
   (b) Calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
   En étudiant la série de terme général $\frac{1}{n^2} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, déterminer une série qui converge vers S plus vite que (S_n).
   (c) On suppose que $S_n = S + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$, on ne connaît ni S ni a ni b. On pose $T_n = 2S_{2n} - S_n$, montrer que (T_n) converge plus vite que S_{2n}, comparer le nombre de calcul élémentaires nécessaire pour calculer (T_n) et S_{2n}, conclusion.
   Comment pourrait-on sur la même idée construire une suite (U_n) qui converge plus vite que (T_{2n}). sol : $(4T_{2n} - T_n)/3$

Exercice 57 : [dur] Soit (a_n) une suite positive telle que $(\sqrt[n]{a_n})$ converge vers $l < 1$. Montrer que la série de terme générale a_n converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.

Exercice 58 : [dur] Soit (a_n) une suite positive telle que $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n - a_{n-1}}\right)$ converge vers $l < 1$.

1. Montrer que la série de terme générale $a_{n+1} - a_n$ converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.
2. En déduire que la suite (a_n) converge plus vite vers 0 que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.
3. En déduire que la série $\sum a_n$ converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.

Suites et séries de fonctions

Exercice 59 : Déterminer les limites simples des suites de fonctions définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2}; \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = x^n; \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = (\cos x)^n$$

Exercice 60 : Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries de fonctions :
$$\sum \frac{1}{x^2+n^2+1}; \qquad \sum \frac{x}{1+n^2}; \qquad \sum \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Exercice 61 : Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ puis sur un intervalle de la forme $[-R;R]$ de la série de fonctions :

$$\sum \frac{x}{x^2+n^2}$$

Séries entières

Exercice 62 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$(a) \sum 2^n x^n$
$(b) \sum n^n x^n$
$(c) \sum n x^n$
$(d) \sum \ln n \, x^n$
$(e) \sum \frac{1}{n!} x^n$
$(f) \sum \frac{n^2-1}{n+1} x^n$
$(g) \sum n^5 x^n$
$(h) \sum 2^n x^{2n}$
$(i) \sum \cos n \, x^n$
$(j) \sum \frac{x^{2n}}{2-\sin(n)}$
$(k) \sum \frac{n^2+n}{2^n+n!} x^n$
$(l) \sum z^{n^2}$
$(m) \sum \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} x^n$
$(n) \sum \frac{(2n)! x^n}{(n!)^2 n^n}$
$(o) \sum (1-\frac{1}{n})^{n^2} x^n$
$(p) \sum x^{n!}$

Exercice 63 : Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières suivantes :

$(a) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$
$(b) \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n} x^n$
$(c) \sum_{n\geq 0} n x^n$
$(d) \sum_{n\geq 0} n x^{2n}$
$(e) \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$
$(f) \sum_{n\geq 0} a_n x^n$
avec $a_{2n} = 3^n$ et $a_{2n+1} = 2^n$

Exercice 64 : Déterminer des séries entières dont la somme est égale aux fonctions suivantes sur leur intervalle de convergence :

$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f_2(x) = e^{2x}$
$f_3(x) = \ln(1+x)$
$f_4(x) = \text{Arctan} x$
$f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}$
$f_6(x) = \frac{x}{1+2x}$
$f_7(x) = \frac{1}{1-x} e^x$
$f_8(x) = \text{ch}\, x$

Exercice 65 : Montrer que l'équation différentielle $xy'' + y' + y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0.

Exercice 66 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ qui sont des sommes de séries entières au voisinage de 0.

Exercice 67 : Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y = \text{Arctan}\, x$ qui soit somme d'une série entière au voisinage de 0.

Combinatoire

Exercice 68 : Pour tout entier d, on cherche à déterminer le nombre de couples d'entier naturel (a, b) tels que $a + 2b = d$, on note $p(d)$ ce nombre.

1. Calculer $p(2)$ et $p(6)$.
2. Écrire les fonctions définies par $\frac{1}{1-t}$ et $\frac{1}{1-t^2}$ comme somme de série entières.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.
4. Décomposer la fraction rationnelle $F(t) := \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$ en éléments simples.
5. En déduire un développement en série entière de $F(t)$.
6. Déterminer une formule pour $p(d)$.
7. Expliquer sans faire les calculs explicitement, comment on pourrait déterminer le nombre de triplet d'entier naturel (a, b, c) tels que $a + 2b + 3c = d$

Exercice 69 : On note C_n, le nombre de parenthésages possible d'un produit de n termes, il est connu sous le nom de $n-1$ème nombre de Catalan.

1. Montrer que $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$ et $C_4 = 5$.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k}$.
3. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$, on note S sa somme.
4. Montrer que $S(x)^2 - S(x) + x = 0$, sur l'intervalle de convergence.
5. On pose $f(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1-4x}\big)$, montrer que f est DSE sur le disque $|x| < \frac{1}{4}$, puis que son développement en série entière $\sum a_n x^n$, sur ce disque vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dbinom{2n-2}{n-1}$.
6. Montrer que $\forall n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \dbinom{2n-2}{n-1}$.

Exercice 70 : [dur] On note a_n le nombre de $n-$uplet d'entiers $(k_1; k_2; \cdots; k_n)$ valant 0 ; 1 ou 2 tels que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$. On pose $a_0 = 1$.

1. Calculer $a_1; a_2$ et a_3.
2. Montrer que a_n est le coefficient de X^n dans le polynôme $P(X) = (1 + X + X^2)^n$.
3. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.
5. Pour $|x| < \frac{1}{3}$, on pose :
$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
Montrer que $A(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{1-x(1+2\cos t)}\,\mathrm{d}t$.
6. On rappelle que $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}$; en posant $u = \tan\frac{t}{2}$, montrer que $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ puis que $\forall x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}],\ A(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$.
7. En déduire que : $\dfrac{A'(x)}{A(x)} = \dfrac{1+3x}{(1-3x)(1+x)}$.
8. Montrer que $\forall x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}],\ (1-3x)(1+x)A'(x) = (1+3x)A(x)$.
9. Montrer que $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}a_n + \dfrac{3n}{n+1}a_{n-1}$.

Séries de Fourier

Exercice 71 : Soit f la fonction 2π périodique telle que $\begin{cases} \forall x \in [0;\pi],\ f(x) = x \\ \forall x \in]-\pi;0[,\ f(x) = -x \end{cases}$
a) Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.
b) Déterminer la série de Fourier de f.
c) Calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$, en déduire $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 72 : Soit f la fonction 2 périodique telle que $\begin{cases} \forall x \in [0;1],\ f(x) = 1 \\ \forall x \in]1;2[,\ f(x) = 0 \end{cases}$
a) Représenter f sur l'intervalle $[-2;2]$.
b) Déterminer la série de Fourier de f.
c) En quels points la somme de cette série est-elle égale à f ?

Exercice 73 : Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x|$.
a) Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.
b) Déterminer la période de f.
c) Déterminer la série de Fourier de f.
d) En déduire la somme de la série $\sum \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 74 : Soit f la fonction périodique de période 1 telle que $\forall x \in [0;1]\ f(x) = x^2(1-x)^2$.
a) Représenter f sur l'intervalle $[-2;3]$.
b) Étudier la régularité de f sur $\mathbb{Z}$.
c) Déterminer la série de Fourier de f.

Exercice 75 : Comparer la vitesse de convergence des séries de Fourier des exercices précédents.

Exercice 76 : f une fonction T_périodique de classe $\mathcal{C}^1$
a) Déterminer une relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f'.
b) Étudier les vitesses de convergence des séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ en fonction de k.

Exercice 77 : Soit f la fonction définie par $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = x$.
a) Représenter f.
b) Écrire $f(x)$ comme la somme d'une série de cosinus c'est à dire $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos nk$.
c) Écrire $f(x)$ comme la somme d'une série de sinus.
d) Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos nk$ converge normalement sur $[0;1]$.
e) Écrire x^2 comme série de sinus pour x compris entre 0 et 1.

Exercice 78 : Démontrer que :

$$\forall x \in]-\pi;\pi[\quad \frac{\pi \sin \alpha x}{2 \sin \alpha\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\alpha^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\alpha^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\alpha^2} - ...$$

Exercices corrigés

Exercice 79 : Soit $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$ représenter A, déterminer sa frontière, son intérieur et son adhérence. Est-ce un ouvert, un fermé de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 80 : Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \sqrt{\cos(x+y)}$$

Déterminer son ensemble de définition , le représenter. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition. On utilisera les théorèmes du cours avec précision.

Exercice 81 : Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \cos(x^3y^2)$$

Exercice 82 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = x^2 + x^2y^2 + y^4$, déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 83 : Étudier et représenter dans un repère orthonormal du plan la courbe paramètrée par

$$\forall t \in \mathbb{R};\ M(t) = (x(t); y(t)) = (\cos t; \sin 2t)$$

Exercice 84 : Calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_D y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où D est le triangle ABC avec $A = (-1;0),\ B = (1;0)$, et $C = (0;2)$

Exercice 85 : Calculer si elle existe l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \,\mathrm{d}x$$

Exercice 86 : Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2+t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{3+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 87 : Etudier la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 88 : Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$, montrer que F est croissante sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}\pi]$ de deux façons différentes : en utilisant la définition de la croissance et en utilisant la dérivée.

Exercice 89 : Soit g une fonction continue, strictement positive sur $[0;1]$ on pose
$\forall x \in [0;1],\ G(x) = \displaystyle\int_0^1 g(t)^x \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \exp\big(x\ln(g(t))\big)\,\mathrm{d}t$ et $F(x) = G(x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Démontrer que $G'(0) = \int_0^1 \ln g(t)\,\mathrm{d}t$. On note dorénavant $K = \int_0^1 \ln g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \ln F(x)$ (le résultat sera donné en utilisant K).
3. En déduire toujours en fonction de K la limite de F en 0.

Exercice 90 : Transformé de Laplace
Soit h une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (c'est à dire que $\int_0^{+\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t$ converge). On pose :

$$T(h)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}h(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $T(h)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $T(h)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $T(h)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha; +\infty[$.
4. En déduire que $T(h)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. On suppose de plus que h est $\mathcal{C}^1$, et que h et h' sont bornées et d'intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}^+$. Trouver une relation entre $T(h)$ et $T(h')$.
6. En utilisant ce qui précède déterminer la transformée de Laplace d'une solution f de l'équation différentielle $h''(t) + h(t) = t^3$, vérifiant $h(0) = h'(0) = 1$ on admettra qu'elle a les propriétés nécessaires.

Exercice 91 : Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \frac{1}{n(n^2+7)}; \quad b_n = \frac{3-7n}{n^2}; \quad c_n = \frac{n}{2^n}; \quad d_n = \frac{n^3}{n!};$$

Exercice 92 : Comparer les vitesses de convergence des séries : $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$.

Exercice 93 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$(a) \sum_n \frac{n^2}{3^n+n} x^n$ $\quad$ $(b) \sum_n 5^n x^{2n+1}$ $\quad$ $(c) \sum_n (2-\frac{1}{n})^n x^{2n}$

Exercice 94 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum 2^n x^{3n}$ et $\sum \frac{2n}{(n!)^2} x^n$.

Exercice 95 : Sois f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que le rayon de cette série entière est infini. De plus $f'(0) = 0$ et f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$xy'' - y = x^2$$

1. Montrer que $a_1 = 0$.
2. Montrer que $a_0 = 0$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre a_n et a_{n+1}, en précisant les n pour lesquels elle est valable.
4. Montrer que $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{6}$, et $\forall n \geq 3,\ a_n = \frac{2n}{(n!)^2}$.

Exercice 96 : Soit f la fonction 2-périodique définie par $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [-1; 0] \\ f(x) = x \text{ si } x \in [0; 1[\end{cases}$.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-2; 2]$.
2. Déterminer la série de Fourier de la fonction f.
3. Calculer la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Corrigés

Corrigé de l'exercice 79 : *A est la partie du plan qui se trouve au dessus de la parabole d'équation $y = x^2$, et qui contient cette parabole . Sa frontière ∂A est la parabole Γ d'équation $y = x^2$. Son intérieur est $A \setminus \Gamma$. Ce n'est pas un ouvert, mais c'est un fermé car sa frontière appartient à A : $\partial A \subset A$.*

Corrigé de l'exercice 80 : *Pour que $f(x,y)$ soit bien défini il faut et il suffit que $\cos(x+y)\geq 0$, ceci revient à avoir $x+y\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$. Ceci se représente dans le plan par des bandes en diagonale, de largeur π, chacune est comprise entre deux droites d'équations $y=-x-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $y=-x+\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Notons $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\right\}$, posons $f_1(x,y)=x$, $f_2(x,y)=y$, f_1 et f_2 sont continues sur Ω, donc f_1+f_2 est continue sur Ω et est à valeur dans $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, or la fonction cosinus est continue positive sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, donc $f_3=\cos\circ(f_1+f_2)$ est continue et à valeur dans $\mathbb{R}^+$ sur Ω. Or la fonction racine carrée f_4 est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f_4\circ f_3$ est continue sur Ω.*

Corrigé de l'exercice 81 : *On fixe la variable y que l'on regarde comme une constante et on dérive par rapport à x. Bien sur il faut savoir dériver une fonction d'une variable, par exemple si $g(x)=\cos(7x^3)$ alors $g'(x)=-21x^2\sin(7x^3)$. De même ici $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-3x^2y^2\sin(x^3y^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x^3y\sin(x^3y^2)$.*

Corrigé de l'exercice 82 : *On peut commencer par remarquer que la fonction est toujours positive et qu'elle s'annule en 0, elle possède donc un minimum local en 0 (ce maximum est même global).*
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathbb{R}^2$, donc si f possède un extremum local est un point M_0 alors ce point est un point critique, c'est à dire que $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0$. On commence donc par chercher les points critiques. $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=2x+2xy^2=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=2x^2y+4y^3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x(1+y^2)=0\\ y(x^2+2y^2)=0\end{cases}\iff x=y=0$. Donc f possède un unique point critique donc au plus un extremum local en 0. Conclusion : f possède un unique extremum local, c'est un minimum globale en 0. Dans cet exercice il est particulièrement important de comprendre la logique du raisonnement, bien plus formateur que la partie calculatoire.

Corrigé de l'exercice 83 :

1. *On commence par regarder les périodes et les symétries.*
   x et y sont 2π périodiques (en fait y est même π périodique), donc on peut limiter l'étude à $[-\pi;\pi]$. On peut aussi remarquer que $M(-t)=(x(t),-y(t))$, c'est à dire que l'on passe de $M(t)$ à $M(-t)$ par une symétrie d'axe (ox), on peut donc limiter l'étude à $[0;\pi]$, on pourrait aussi comparer $M(t)$ avec $M(\pi-t)$.
2. *x et y sont dérivables étudions leur variations sur l'intervalle $[0;\pi]$ à l'aide d'un grand tableau de variation à quatre lignes facile à réaliser à la main moins sur l'ordinateur... $x'(t)=-\sin t$ et $y'(t)=2\cos 2t$, x est décroissante entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, puis croissante entre $\frac{1}{2}\pi$ et π, d'autre part x varie alors de 1 à 0 puis de 0 à 1. On fait de même l'étude pour y : croissant, décroissant, croissant.*
3. *On peut regarder un peu les tangentes en certains points par exemple pour $t=0$, $M(0)=(1;0)$ et $M'(0)=(0;2)$, la tangente est donc verticale. De même pour $t=\frac{\pi}{4}$ la tangente est horizontale ...*
4. *Finalement en utilisant la symétrie on trouve quelque chose comme :*

Corrigé de l'exercice 84 : *Il faut commencer par dessiner le triangle. Ensuite on cherche les équations des droites (AC) et (BC), on obtient $(AC):y=2(x+1)$ et $(AB):y=2(1-x)$. Le plus simple et de faire varier y d'abord, il varie de 0 à 2 puis ensuite d'étudier les variations de x, "qui varie de la droite (AC)" : $\frac{1}{2}y-1$ "à la droite (BC)" : $1-\frac{1}{2}y$. On a donc*

$$I=\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}y-1}^{1-\frac{1}{2}y}y\,dx\right)dy=\int_0^2(2-y)y\,dy=\frac{4}{3}$$

Si on avait voulu commencer par faire varier x il aurait fallu calculer deux intégrales, l'une pour x allant de -1 à 0, puis l'autre x allant de 0 à 1.

Corrigé de l'exercice 85 : *On commence par une IPP :*

$$\int_A^0 xe^x\,dx=[xe^x]_A^0-\int_A^0 e^x\,dx$$

$[xe^x]_A^0 = -Ae^A$ qui tend vers 0 lorsque A tend vers $-\infty$, car "l'exponentielle l'emporte sur les puissances de" x".
$\int_A^0 e^x\,dx = 1 - e^A$ qui tend vers 1 lorsque A tend vers $-\infty$, finalement l'intégrale converge et vaut 1.

Corrigé de l'exercice 86 : La première intégrale est généralisée en 0.
on remarque que $\forall x \in]0;1],\ 0 \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{e^t}{t}$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge donc l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt$ diverge.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2+t}\,dt$ est généralisée en $+\infty$.
Or $0 \leq \frac{e^{-t}}{2+t} \leq e^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, il suffit de calculer $\int_0^X e^{-t}\,dt$ et de faire tendre X vers l'infini.
La troisième intégrale est généralisée en $+\infty$.
Or $0 \leq \frac{1}{3+\cos t} \leq \frac{1}{2}$, d'ou $0 \leq \frac{e^{-t}}{3+\cos t} \leq \frac{1}{2}e^{-t}$ or $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ converge, donc l'intégrale converge.

Corrigé de l'exercice 87 : L'unique problème est en $+\infty$ car la fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut commencer par majorer le sinus par 1. $\left|\dfrac{\sin t}{1+t+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t+t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. Or $\frac{1}{1+t+t^2} \sim \frac{1}{t^2} \geq 0$ dont l'intégrale au voisinage de $+\infty$ converge (par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente). Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t+t^2}\,dt$ converge.

Corrigé de l'exercice 88 :

1. En revenant à la définition de la croissance d'une fonction, soient x et y tels que $0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, pour tout $t \in [0;1]$, on a $0 \leq tx \leq ty \leq \frac{\pi}{2}$, or la fonction sinus est croissante sur $[0; \frac{1}{2}\pi]$ donc $0 \leq \sin(tx) \leq \sin(ty) \leq 1$. or il est clair que l'on a aussi $0 \leq \frac{1+x}{1+t^2} \leq \frac{1+y}{1+t^2}$, tous les termes étant positifs, on obtient en multipliant les inégalités, pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{1+x}{1+t^2}\sin(tx) \leq \frac{1+y}{1+t^2}\sin(ty)$ d'ou en intégrant t entre 0 et 1 on obtient $F(x) \leq F(y)$. CQFD.
2. Posons $f(x,t) = \frac{1+x}{1+t^2}\sin(tx)$; f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues donc F est dérivable et
$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sin(tx) + \frac{1+x}{1+t^2}t\cos(tx)\,dt$$
or pour $x \in [0; \frac{1}{2}\pi]$ et $t \in [0;1]$ on a $\frac{1}{1+t^2}\sin(tx) + \frac{1+x}{1+t^2}t\cos(tx) \geq 0$ car tous les termes sont positifs en intégrant t de 0 à1 on obtient que $F'(x) \geq 0$, donc F est croissante sur $[0; \frac{1}{2}\pi]$.

Corrigé de l'exercice 89 :
1. Posons $f(x,t) = \exp\big(x\ln(g(t))\big)$, f est une fonction de deux variables, continue, qui admet une dérivée partielle par rapport à x. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(g(t))\exp\big(x\ln(g(t))\big)$ qui est continue. on peut donc utiliser le théorème du cours sur la dérivation des fonctions définies par une intégrale : G est dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = \int_0^1 \ln(g(t))\exp\big(x\ln(g(t))\big)\,dt$.
En particulier $G'(0) = \int_0^1 \ln(g(t))\exp\big(0\ln(g(t))\big)\,dt = \int_0^1 \ln(g(t))\,dt$
2. $\ln F(x) = (\frac{1}{x})\ln G(x) = \frac{\ln G(x) - \ln G(0)}{x}$ car $G(0) = 1$. La limite de $\ln \circ F$ en 0 n'est autre que la dérivée de $\ln \circ G$ en 0, c'est donc $\dfrac{G'(0)}{G(0)} = K$
3. $F(x) = \exp\big(\ln F(x)\big)$, en faisant tendre x vers 0 on obtient $\lim_{x\to 0} F(x) = e^K$.

Corrigé de l'exercice 90 : On peut commencer par remarquer qu'avec les notations du cours on a :
$$F(x) = T(h)(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \text{ avec } f(x,t) = e^{-xt}h(t)$$

1. Pour tout $x \geq 0$ on a la majoration $|e^{-xt}h(t)| \leq |h(t)|$, or $\int_0^{+\infty} |h(t)|\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}h(t)\,dt$ converge.
2. On utilise le théorème sur la continuité des fonctions définies par une intégrale généralisée. f a bien la propriété de domination en effet $|f(x,t)| \leq |h(t)|$, or $\int_0^{+\infty} |h(t)|\,dt$ converge, de plus f est le produit de deux fonctions continues elle est donc continue. $T(h)$ est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. On utilise le théorème sur la dérivabilité des fonctions définies par une intégrale généralisée. f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}h(t)$, elle vérifie bien la propriété de domination car
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq te^{-\alpha t}h(t)$$
Or la fonction $t \mapsto te^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ une étude élémentaire de la fonction permet de s'en rendre compte. On a donc la majoration $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq Mh(t)$ et $Mh(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. T(h) est donc de classe $\mathcal{C}^1$et
$$T(h)'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-xt}h(t)\,dt$$
4. En tout point x de $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant la propriété précédente avec $\alpha = \frac{1}{2}x$, on voit que $T(h)$ est dérivable au voisinage de x de dérivée continue, d'ou le résultat demandé.
5. Essayons d'intégrer par partie $\displaystyle\int_0^X e^{-xt}h(t)\,dt = [\frac{-1}{x}e^{-xt}h(t)]_{t=0}^{t=X} + \int_0^X \frac{1}{x}e^{-xt}h'(t)\,dt.$
En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient $T(h)(x) = \dfrac{-1}{x}h(0) + \dfrac{1}{x}T(h')(x)$, car $\lim_{X\to+\infty} e^{-xX}h(X) = 0$. D'ou $T(h')(x) = xT(h)(x) + h(0)$
6. Si $h'' + h = t^3$ alors on peut regarder les transformées de Laplace et on obtient $T(h'')(x) + T(h)(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-xt}t^3\,dt$. En utilisant la question précédente et à l'aide de petits calculs on obtient $xT(h')(x) + h'(0) + T(h)(x) = \frac{6}{x^4}$. En utilisant une deuxième fois la question précédente on obtient : $x\big(xT(h)(x) + h(0)\big) + h'(0) + T(h)(x) = \frac{6}{x^4}$. D'ou
$$T(h)(x) = \frac{-1}{1+x^2}(1 + x + \frac{6}{x^4})$$

Corrigé de l'exercice 91 : Le terme général a_n est positif, il est majoré par $\frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum a_n$ converge.
Le terme général b_n est négatif dès le rang 2, son opposé $-b_n$ est donc positif dès le rang 2, or $-b_n \sim \frac{7}{n}$ qui est positif et le terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série $\sum -b_n$ diverge donc la série $\sum b_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 92 : Attention à ne pas confondre la suite $(\dfrac{1}{2^n})$ et la série $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n}$, pour étudier la série il faut commencer par calculer le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, pour cela on peut commencer par regarder $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k}$ puis faire tendre N vers l'infini, or $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{N+1}}\right)/\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ d'ou $R_n = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. De même pour la série $\displaystyle\sum \frac{1}{3^n}$ le reste $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$. Finalement $\frac{T_n}{R_n} = \frac{2^n}{2}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement la série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge plus vite que la série $\sum \frac{1}{2^n}$.

Corrigé de l'exercice 93 : Pour (a) Commençons par regarder un équivalent $\frac{n^2}{3^n+n}x^n \sim \frac{n^2}{3^n}x^n$ puis utilisons le critère de D'Alembert
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}x^{n+1}\frac{3^n}{n^2x^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{|x|}{3}$$
or cette suite tend vers $\frac{|x|}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $|x| < 3$ la série est donc convergente, pour $|x| > 3$ la série est divergente, le rayon de convergence est donc $R = 3$.
Pour (b) utilisons le critère de D'Alembert
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|5^{n+1}x^{2(n+1)+1}\frac{1}{5^nx^{2n+1}}\right| = 5|x|^2$$
or cette suite tend vers $5|x|^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ la série est donc convergente, pour $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$ la série est divergente, le rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On peut remarquer que la série de départ est une série géométrique un petit peu camouflée.

Pour (c) *Utilisons cette fois le critère de Cauchy*

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(2-\frac{1}{n}\right)^n x^{2n}\right|} = \left(2-\frac{1}{n}\right)|x|^2$$

or cette suite tend vers $2|x|^2$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *Pour* $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *la série est donc convergente, pour* $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ *la série est divergente, le rayon de convergence est donc* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 94 : *La première série est une série géométrique de raison* $2x^3$ *elle converge si et seulement si* $|2x^3| < 1$ *ce qui équivaut à* $x \in]-2^{-1/3}; 2^{-1/3}[$, *Donc* $R = 2^{-1/3}$. *On peut aussi utiliser D'Alembert ou Cauchy.*
$u_n = \dfrac{2n}{(n!)^2}x^n$. *Regardons* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2(n+1)}{((n+1)!)^2}|x|^{n+1}\frac{(n!)^2}{|x|^n}2n = \frac{(n+1)}{n}\frac{|x|}{(n+1)^2}$$

Donc $\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, *la série de terme général* u_n *converge toujours, donc le rayon de convergence est infini.*

Corrigé de l'exercice 95 : *1. Une formule du cours nous dit que pour un rayon de convergence non nul,* $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. *D'ou* $a_1 = f'(0) = 0$. *On peut aussi remarquer que* $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n 0^{n-1}$, *tous les termes sont nuls sauf pour* $n = 1$ *d'ou* $a_1 = 0$.
2. Dans l'équation différentielle qui est valable pour tout x *de* $\mathbb{R}$, *si l'on prend* $x = 0$ *on obtient* $0f''(0) - f(0) = 0$ *d'ou* $f(0) = 0$ *d'ou* $a_0 = 0$.
3. $xf''(x) - f(x) - x^2 = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2$
$xf''(x) - f(x) - x^2 = -a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)na_{n+1} - a_n\big)x^n - x^2$
Comme f *est solution on a pour tout* $n > 2$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 0$ *pour* $n = 2$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 1$, *pour* $n = 1$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 0$, *et* $a_0 = 0$.
4. Ce qui nous donne a_2 *et* a_3, *puis une recurrence nous permet de trouver la formule générale de* a_n.

Corrigé de l'exercice 96 : *ici* $T = 2$ *et* $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. *On rappelle les formules*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\cos(\omega nt)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

ici en utilisant la définition de f *on obtient :* $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{4}$
$a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\cos(\omega nt)\,dt = \int_0^1 t\cos(\pi nt)\,dt = \left[t\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nt)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi n}\sin(\pi nt)\,dt$
d'ou $a_n = \left(\dfrac{1}{\pi n}\right)^2(\cos n\pi - 1) = \left(\dfrac{1}{\pi n}\right)^2((-1)^n - 1)$
$b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \int_0^1 t\sin(\pi nt)\,dt = \left[-t\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nt)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi n}\cos(\pi nt)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$
En appliquant le théorème de Dirichlet en 0 on obtient : $0 = \frac{1}{4} + \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{\pi(2k+1)}\right)^2(-2)$. *D'ou l'on tire*

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$