Cours de Mathématiques

Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur

L3 SPI

12 septembre 2011

Alexandre MIZRAHI

Table des matières

1 Algèbre **4**
1.1 Nombres complexes 4
1.1.1 Introduction 4
1.1.2 Le BAba 4
1.1.3 Module et argument 4
1.1.4 Racines 6
1.2 Polynômes 6
1.2.1 Introduction 6
1.2.2 Définitions 6
1.2.3 Factorisation 7
1.3 Fractions rationnelles 8
1.3.1 Introduction 8
1.3.2 Définitions 8
1.3.3 Décomposition en éléments simples 8

2 Analyse **10**
2.1 Fonctions numériques 10
2.1.1 Introduction 10
2.1.2 Limite 10
2.1.3 Dérivées 11
2.1.4 Développements limités 12
2.1.5 Équivalents 13
2.1.6 Convexité 13
2.1.7 Branches infinies 13
2.1.8 Fonction circulaires réciproques 13
2.2 Intégration 14
2.2.1 Généralités 14
2.2.2 Méthodes d'intégration 15
2.2.3 Fonctions complexes 16
2.2.4 Linéarisation 16
2.2.5 Intégration des fractions rationnelles 16

3 Calcul matriciel **18**
3.1 Introduction 18
3.2 Espaces vectoriels et applications linéaires 18
3.2.1 Définitions 18
3.2.2 Applications linéaires 19
3.3 Matrices 20
3.3.1 Introduction 20
3.3.2 Matrice d'application linéaire 20
3.3.3 Matrice inverse 21
3.3.4 Méthode du pivot de Gauss. 22
3.3.5 Matrice de passage 23
3.3.6 Matrices d'applications linéaires et changement de bases 24
3.4 Déterminant 24

3.4.1 Cas de la dimension deux 24
3.4.2 Cas général déterminant à n lignes et n colonnes 25
3.4.3 Cas de la dimension 3 26
3.4.4 Méthode de Cramer 27
3.5 Diagonalisation 27
3.5.1 Algèbre des matrices diagonales 27
3.5.2 Vecteurs propres, valeurs propres 27
3.5.3 Diagonalisation 28
3.5.4 Méthode de diagonalisation 29
3.5.5 Cas des matrices non diagonalisables 30
3.5.6 Cas des matrices symétriques 30

Présentation de l'enseignement

L'objectif de cet enseignement est l'acquisition par l'étudiant d'un nombre assez important de méthodes de calculs mathématiques, le cours présente ces méthodes. Certaines preuves sont données car elles peuvent permettre une meilleur compréhension des résultats, elles ne sont pas un objectif en soi, parfois juste une esquisse de la preuve est proposée. Ce polycopié est à utiliser en complément du cours, qui l'éclaire.

Échelonnement prévisionnel du cours

Paragraphe	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	3.2 & 3.3	3.4	3.5
Nombre de semaines	1	1	1	2	2	2	1	2

Conseil de travail hebdomadaire :

1. Avant le cours, lecture rapide du paragraphe du poly.
2. Pendant le cours, participation active à la séance, questions.
3. Pendant le TD, recherche des exercices avec le poly.
4. Après le TD, reprise du cours et des exercices.

Évaluation de l'enseignement :

Lors des épreuves calculatrices et documents sont interdits, toutefois une feuille A5 individuelle manuscrite est autorisée (photocopie interdite). Une sorte d'antisèche légale. Les téléphones sont interdis durant les épreuves, et doivent être éteints (silencieux n'est pas suffisant), penser à prendre une montre si besoin.

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Nombres complexes

1.1.1 Introduction

Ce chapitre est un chapitre de révision, on survole les notions du programme de terminale sur les nombres complexes, on va vite, juste pour se remettre les idées en place. Les nombres complexes ont été introduit historiquement pour résoudre les équations du troisième degré. Les nombreux résultats énoncés dans cette section sont très simples à démontrer

1.1.2 Le BAba

Définition 1 On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C} = \{a+ib/a, b \in \mathbb{R}\}$, les opérations habituelles sur les réels restent valable, commutativité, distributivité, etc.... la particularité de i réside dans le fait que $i^2 = -1$.

Exemple 1.1
- $(2+3i) + (1-5i) = 3-2i$
- $5(2-6i) = 10-30i$
- $i(2-6i) = 2i+6$
- $(2+3i)(1-5i) = 2+3i-10i-15i^2 = 17-7i$
- $(2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$

Définition 2 La partie réelle est définie par $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(a+ib) = a$, et la partie imaginaire par $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(a+ib) = b$

Exercice 1 : : Déterminer partie réelle et partie imaginaire de zz' en fonction des parties réelles et imaginaires de z et z'.

1.1.3 Module et argument

Lorsque les variables ne sont pas quantifiées, ce sont des complexes quelconques.

<u>**Conjugaison**</u>

Définition 3 $\overline{z} = \mathcal{R}\mathrm{e}\,z - i\mathcal{I}\mathrm{m}\,z$. On dit que $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Proposition 1.1
1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
4. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
5. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
7. $\mathcal{R}\mathrm{e}\,z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$
8. $\mathcal{I}\mathrm{m}\,z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$

<u>**Module**</u>

Définition 4 On définit le module d'un nombre complexe par : $|z| = \sqrt{(\mathcal{R}\mathrm{e}\,z)^2 + (\mathcal{I}\mathrm{m}\,z)^2}$.

Proposition 1.2

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z|^2 = z\overline{z}$.
3. $|z| = |\overline{z}|$.
4. $|zz'| = |z|\,|z'|$.
5. $\forall n \in \mathbb{Z},\ |z^n| = |z|^n$.
6. $\forall z' \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
7. $|\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z)| \leq |z|$.
8. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
9. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Preuve : Pour le point 8. on a

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z\overline{z'}) \\
&\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2
\end{aligned}$$

Remarque 1.1 Les nombre réels se représentent sur une droite, les nombres complexes se représentent dans le plan. Dans un repère orthonormal on peut représenter le complexe $a+ib$ par le point de coordonnées (a, b), ou par le vecteur de coordonnées (a, b). On dit que ce point ou ce vecteur a pour affixe le complexe $a + ib$. La somme de deux complexes correspond alors à la somme des deux vecteurs correspondant. La conjugaison correspond à la réflexion par rapport au premier axe. Le module correspond à la norme du vecteur.

Exponentielle complexe

Définition 5 $\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Proposition 1.3

1. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
3. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$.
5. Formule de De Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Définition 6 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

Argument

Définition 7 Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

l'ensemble des θ qui vérifient cette relation est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, on l'appelle argument du complexe $x + iy$. Arg$z$, désignera aussi bien, l'ensemble ainsi défini (l'argument de z), qu'une de ses valeurs (un argument de z). L'écriture précédente peut aussi s'écrire $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Remarque 1.2 Si M est le point d'affixe $a + ib$, alors l'argument de $a + ib$ est l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 8 a congrue à b modulo m que l'on note $a = b\ [m]$ signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b + km$.

Proposition 1.4

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$,
$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z')\ [2\pi] \end{cases}$$
2. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z|e^{i\mathrm{Arg}z}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Arg}\overline{z} = -\mathrm{Arg}z\ [2\pi]$.
4. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')\ [2\pi]$.
5. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}z\ [2\pi]$.
6. $\forall z' \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Arg}\frac{z'}{z} = \mathrm{Arg}z' - \mathrm{Arg}z\ [2\pi]$.

1.1.4 Racines

Proposition 1.5 Tout complexe Z non nul à exactement deux racines carrés, c'est à dire deux complexes z_1 et z_2 dont le carré vaut Z.

Preuve : Si $Z = |Z|Re^{i\theta}$ alors les seuls racines carrés possibles sont $\pm\sqrt{|Z|}e^{i\frac{1}{2}\theta}$.

Proposition 1.6 Tout complexe Z non nul à exactement n racines nième , c'est à dire qu'il existe exactement n complexes z_i qui élevés à la puissance n valent Z.

Preuve : Si $Z = |Z|e^{i\theta}$ alors les seuls racines nième possibles sont $\sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{1}{n}\theta+\frac{1}{n}2ik\pi}$, pour k variant de 0 à $n-1$, ensuite on retombe sur les même valeurs.

1.2 Polynômes

1.2.1 Introduction

On s'intéresse dans ce cours aux polynômes à coefficients réels ou complexes. On ne fait pas de différence entre polynôme et fonction polynôme . Les points importants sont la division euclidienne des polynômes et la factorisation des polynômes.

1.2.2 Définitions

Définition 9 – On appelle polynôme réel, une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme.

– On appelle polynôme complexe, une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

– Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$, on dit que P est de degré n et que a_n est le coefficient dominant de P. Lorsque $P = 0$ on dit que le degré de P est $-\infty$.

Remarque 1.3 – Un polynôme réel est un polynôme complexe.

– L'écriture de la définition précédente est unique, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les même coefficients. C'est ce qui permet de définir le degré d'un polynôme. ceci n'est pas tout à fait triviale on peut par exemple étudier la limite en l'infini de $P_1 - P_2$.

– Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$, le polynôme dérivé P' de P vaut

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$$

Proposition 1.7 Soient P et Q deux polynômes et λ un complexe non nul :

– $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
– $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
– $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. Avec la convention que pour tout degré r, $(-\infty + r = -\infty)$.

Définition 10 Soient P un polynôme, et a un complexe, a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Soient P un polynôme, a un complexe, et $m \in \mathbb{N}^*$, a est une racine de P de multiplicité m si

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

si $m = 1$ on dit que a est une racine simple , si $m = 2$ on dit que a est une racine double , etc...

1.2.3 Factorisation

Proposition 1.8 (Division euclidienne) Il existe une division euclidienne des polynômes, en ce sens que pour tout couple de polynômes (P, T) avec $T \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$P = QT + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(T)$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne.

Exemple 1.2 Le quotient de la division euclidienne de $X^2 + X - 4$ par $X + 2$ est $X - 1$ et le reste est -2.

Preuve : L'unicité se montre à l'aide de considérations sur les degrés. L'existence peut se montrer à l'aide d'une récurrence sur le degré de P.

Proposition 1.9 (Formule de Taylor) Soit P un polynôme de degré n,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Preuve : Il suffit de calculer la dérivée kième de P en 0, avec $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$

Proposition 1.10 a est une racine du polynôme P de multiplicité m si et seulement si il existe un polynôme Q dont a n'est pas racine tel que $P(x) = (x - a)^m Q(x)$

Preuve : si a est une racine, on peut factoriser par $(x - a)$, il suffit pour cela d'effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. La formule de Taylor appliquée au polynôme $Q(x) = P(x + a)$ nous donne :

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{1}{2} P^{(2)}(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{(m - 1)!} P^{(m-1)}(a)(x - a)^{m-1} + (x - a)^m S(x)$$

où S est un polynôme. On retrouve la division euclidienne de P par $(x - a)^m$. On obtient bien le résultat annoncé.

Proposition 1.11 Soit P est un polynôme, α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ des racines distinctes de P de multiplicité m_1, m_2, …, m_k, alors il existe un polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_k)^{m_k} Q(x)$$

Théorème 1 (dit de d'Alembert ou théorème fondamental de l'algèbre) *Tout polynôme à coefficient complexe peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.*

Preuve : Ce théorème n'est pas facile du tout à démontrer.

Remarque 1.4 Si un complexe z est racine d'un polynôme P à coefficients réel alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi racine du polynôme P.

Théorème 2 *Tout polynôme P à coefficient réel peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1, et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

Preuve : D'après le théorème précédent P peut s'écrire comme produit de polynômes complexes de degré 1.

$$P(x) = \prod_i (x - a_i)^{m_i}$$

où m_i est la multiplicité de a_i.
Soit a_i une racine complexe de P de multiplicité m_i, $\overline{a_i}$ est une racine complexe de P. Si $m_i \geq 2$, a_i est une racine de P', d'ou $\overline{a_i}$ est une racine de P'. Et ainsi de suite jusqu'à $P^{(m_i - 1)}$. Réciproquement comme $P^{(m_i)}(a_i) \neq 0$, on a $P^{(m_i)}(\overline{a_i}) \neq 0$. On en déduit donc que $\overline{a_i}$ est une racine complexe de P de multiplicité m_i. Si $a_i \in \mathbb{R}$ alors $a_i = \overline{a_i}$, par contre si $a_i \notin \mathbb{R}$ il existe j tq $a_j = \overline{a_i}$ et $m_i = m_j$. On a alors

$$(x - a_i)^{m_i} (x - \overline{a_i})^{m_i} = (x^2 - 2\mathcal{R}\text{e}\,(a_i) x + |a_i|^2)^{m_i}$$

$x^2 - 2\mathcal{R}\text{e}\,(a_i) x + |a_i|^2$ est un polynôme réel de degré 2 à discriminant strictement négatif (car le trinôme possède deux racines complexe conjuguées distinctes)

1.3 Fractions rationnelles

1.3.1 Introduction

Les fractions rationnelles sont des fonctions qui apparaissent fréquemment, l'objectif principal de cette partie est la décomposition en éléments simples.

1.3.2 Définitions

Définition 11
- Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes à coefficients réels ou complexes.
- Une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est dite irréductible si "on ne peut pas la simplifier", ceci revient à dire que P et Q n'ont aucune racine complexe commune, ou encore que P et Q sont de degré minimal.
- Si a est une racine de P et n'est pas une racine de Q, on dit que a est une racine de $\dfrac{P}{Q}$. On appelle ordre de a dans $\dfrac{P}{Q}$, la multiplicité de a dans P.
- Si a est une racine de Q et n'est pas une racine de P, on dit que a est un pôle de $\dfrac{P}{Q}$. On appelle ordre de a dans $\dfrac{P}{Q}$, la multiplicité de a dans Q.
- On pose $\deg(\frac{P}{Q}) = \deg P - \deg Q$.

Exemple 1.3
- $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)(x-6)^2}$ est irréductible, $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)(x-1)^2}$ et $\frac{x^2-x-2}{(x+1)^2(x-6)^2}$ ne le sont pas.
- 1 est une racine d'ordre 3 de la fraction rationnelle $\frac{(x-1)^3(x+6)}{(x-3)^2(x-7)^5}$ et 3 est un pôle d'ordre 2.
- degré$\left(\frac{(x-1)^3(x+6)}{(x-3)^2(x-7)^4}\right) = -2$

Proposition 1.12 Soit F une fraction rationnelle, il existe un unique couple (P, H) polynôme, fraction rationnelle tel que $F = P + H$ avec $\deg(H) < 0$. P s'appelle alors la partie entière de F.

Preuve : Il suffit d'effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour obtenir cette décomposition.

Exemple 1.4 $\dfrac{x^3+1}{(x-1)(x+2)} = x - 1 + \dfrac{3x-1}{x^2+x-2}$

1.3.3 Décomposition en éléments simples

Proposition 1.13 Soit F une fraction rationnelle, et a un pôle d'ordre n de F, il existe une unique suite $(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n)$ de réels (ou de complexes) telle que $F - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{(x-a)^k}$ soit une fraction rationnelle dont a n'est pas un pôle.

Exemple 1.5 $-3\,\frac{x^3+20\,x^2+104\,x+172}{(x+2)^2(x-4)(x+5)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x^2+9\,x+29}{(x-4)(x+5)^2}$

Preuve : Pour l'unicité, on part de deux décompositions, on multiplie par $(x-a)^n$ et on fait tendre x vers a, on a $\lambda_n = \lambda'_n$, puis on recommence avec $n-1$ et ainsi de suite. Pour l'existence c'est un peu plus compliqué, on peut commencer par démontrer le résultat suivant : Étant donnée deux polynômes P et Q tels que $Q(0) \neq 0$, et n un entier, il existe un polynôme T de degré $n-1$, tel que $P - TQ$ admette 0 comme racine de multiplicité n. Ceci ce démontre facilement car il revient à résoudre un système triangulaire à diagonale sans 0. Ensuite on applique ce résultat à $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ définis de la façon suivante si $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, on pose $\widetilde{P}(x) = P(x+a)$ et $\widetilde{Q}(x) = Q(x+a)$.

Théorème 3 *Décomposition en éléments simples*
Soient P et Q deux polynômes réels tels que $\deg P < \deg Q$, et (λ_i) une famille de réels distincts deux à deux.

1. *Si* $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ *alors il existe une unique famille de réels* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = \frac{a_1}{X-\lambda_1} + \frac{a_2}{X-\lambda_2} + \ldots + \frac{a_n}{X-\lambda_n}$$

2. *Si* $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)^{m_i}$ *alors il existe une unique famille de réels* $*$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = \frac{*}{(X-\lambda_1)^{m_1}} + \frac{*}{(X-\lambda_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{*}{X-\lambda_1} + \frac{*}{(X-\lambda_2)^{m_2}} + \ldots + \frac{*}{(X-\lambda_2)} + \ldots + \frac{*}{X-\lambda_n}$$

3. *Si* $Q = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)^{m_k}\prod_{l=1}^{m}(X^2+\gamma_l X+\delta_l)^{\beta_l}$ *avec* $\gamma_l^2 - 4\delta_l < 0$ *alors il existe une unique famille de réels * tels que :*

$$\frac{P}{Q} = \frac{*}{(X-\lambda_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{*}{X-\lambda_n} + \frac{*X+*}{(X^2+\gamma_l X+\delta_l)^{\beta_1}} + \frac{*X+*}{(X^2+\gamma_l X+\delta_l)^{\beta_1-1}} \ldots + \frac{*X+*}{X^2+\gamma_m X+\delta_m}$$

Preuve : Les deux premiers points découlent de la proposition 1.13, en réitérant le procédé pour chacun des pôles, le point 3 est plus compliqué, il faut passer par les complexes, puis re-associer les pôles complexes qui sont conjugués.

Exemple 1.6
- $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}$.
- $\frac{x^4}{(x+1)(x+2)^2} = x - 5 + \frac{1}{x+1} - \frac{16}{(x+2)^2} + \frac{16}{x+2}$.
- $\frac{3}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$.
- $\frac{9}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3x-3}{(x^2+2)^2}$

Remarque 1.5 La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle irréductible $\frac{P}{Q}$ comporte exactement un nombre de constantes égale au degré de Q.

Méthode de décomposition en éléments simples (M1) :

1. Division euclidienne pour que le numérateur soit de degré strictement inférieur au dénominateur.
2. Écrire la fraction sous forme décomposée en éléments simples avec des coefficients inconnus.
3. A l'aide de différentes limites, trouver les différents coefficients inconnus.
   (a) si a est un pôle simple le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ s'obtient en multipliant l'égalité précédente par $(x-a)$ est en faisant tendre x vers a.
   (b) si a est un pôle d'ordre m le coefficient de $\frac{1}{(x-a)^m}$ s'obtient en multipliant l'égalité précédente par $(x-a)^m$ est en faisant tendre x vers a.
   (c) En soustrayant le terme trouvé précédemment $\frac{\lambda}{(x-a)^m}$, on retombe sur un pôle d'ordre $m-1$.
   (d) On peut utiliser les limites en l'infini, après avoir multiplié par un x^k bien choisi.
   (e) On peut écrire l'égalité pour un x fixé, bien choisi, réel ou complexe.

Chapitre 2

Analyse

2.1 Fonctions numériques

2.1.1 Introduction

L'objectif de ce cours est simple, étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par une formule sur l'ensemble de définition D_f, comment faire pour l'étudier et donner les grandes lignes de sa représentation graphique $\mathscr{C}$.

2.1.2 Limite

On rappelle rapidement la définition rigoureuse de la limite l d'une fonction f en a.

Définition 12 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Proposition 2.1 Une fonction f a pour limite l en a si et seulement si pour toute suite d'éléments de D_f, $(u_n)_n$ qui tend vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_n$ tend vers l.

On ne revient pas sur les autres définitions de limites et sur les règles usuelles de calculs de limites, somme, produit, composée. On rappelle quelques limites classiques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim_{x\to+\infty} e^x & = & +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^x & = & 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) & = & +\infty \\ \lim_{x\to 0} \ln(x) & = & -\infty \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} & = & 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

On rappelle que

- en l'infini l'exponentielle de x l'emporte sur une puissance de x. En ce sens que :

$$\lim_{+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = \lim_{+\infty} e^{\beta x} \quad (\text{ pour } \beta \neq 0)$$

- en $+\infty$ (ainsi qu'en 0) une puissance de x l'emporte sur $\ln x$. En ce sens que :

$$\lim_{+\infty} x^\alpha \ln x = \lim_{+\infty} x^\alpha \quad (\text{ pour } \alpha \neq 0)$$

Définition 13 Soit $a \in D_f$, f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
f est continue si elle est continue en tout point de D_f.

Théorème 4 (dit des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, pour tout réel w compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = w$.*

2.1.3 Dérivées

Définition 14 La fonction f est dérivable en a si la fonction définie par $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a, dans ce cas on note $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Remarque 2.1 Une interprétation en terme de corde de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, nous donne que si f est dérivable en a alors $\mathscr{C}$ a, au point $(a,f(a))$, une tangente d'équation

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$f'(a)$ est donc la pente de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $(a,f(a))$.

Proposition 2.2
- Si f est dérivable en a alors il existe une fonction ε qui tend vers en 0 en a et telle que

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$$

- Si il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et un réel α tels que

$$f(x)=f(a)+\alpha(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$$

alors f est dérivable en a et $f'(a)=\alpha$.

Proposition 2.3 Soient f, g et u des fonctions dérivables et a un réel, tels que les formules aient un sens :
1. $(f+g)'=f'+g'$
2. $(a\,f)'=a\,f'$
3. $(fg)'=f'g+fg'$
4. $(f\circ u)'(x)=f'\big(u(x)\big)\times u'(x)$ on rappelle à ce propos que $(f\circ u)(x)=f\big(u(x)\big)$.
   (a) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
   (b) $(f^k)'=kf'f^{k-1}$
   (c) $(\ln\circ f)'=\frac{f'}{f}$

Proposition 2.4 Quelques dérivées usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$

Théorème 5 (dit des accroissements finis) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Proposition 2.5 Soit f une fonction dérivable **sur un intervalle** I
1. f est croissante si et seulement si sa dérivée est positive.
2. f est décroissante si et seulement si sa dérivée est négative.

3. f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.
4. Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante.
5. Si f' est strictement négative alors f est strictement décroissante.

Définition 15 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, une fonction F est une primitive de f si $F' = f$.

Proposition 2.6 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et F une primitive de f. Une fonction G est une primitive de f si et seulement si il existe une constante C telle que $F = G + C$.

2.1.4 Développements limités

Définition 16 Une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage d'un point a si le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On note alors $f = o(g)$.

Remarque 2.2 Cette définition n'est plus opérationnelle si la fonction g s'annule dans un voisinage de a dans ce cas il est préférable de prendre comme définition, il existe une fonction ε définie au voisinage de a, qui tend vers 0 en a, et telle que $\forall x,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, là encore cela revient à définir rigoureusement qu'au voisinage de a, f est beaucoup plus petite que g.

Remarque 2.3 Au voisinage de 0 on a $x^n = o(x^m)$ si et seulement si $n > m$. $x^2 = o(x)$ et $x = o(1)$

Définition 17 f possède un développement limité en 0 d'ordre n (DL_n) si il existe un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_xx^n$ de degré inférieur ou égale à n et une fonction $o(x^n)$ tels que :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$

$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ est appelé partie principale du DL_n

Exemple 2.1 $f(x) = x\sqrt{x}$, possède un DL_1 en 0 dont la partie principale est nulle, mais ne possède pas de DL_2.

Proposition 2.7 (formule de Taylor) Si f est n fois dérivable en a alors au voisinage de a on a :
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + ... + \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n)$

Proposition 2.8 On rappelle ici des développements limités classiques au voisinage de 0 :

1. $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2. $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
3. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + o(x^3)$

Proposition 2.9 Soient f et g deux fonctions admettant un DL_n en 0, notons P_f la partie principale du DL_n de f et P_g celle de g.

1. $f + g$ possède un DL_n dont la partie principale est $P_f + P_g$.
2. fg possède un DL_n dont la partie principale est obtenue en ne gardant du polynôme P_fP_g que les termes de degré inférieur ou égal à n.
3. Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ possède un DL_n dont la partie principale est obtenue en ne gardant du polynôme $P_g \circ P_f$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

On fera bien attention au fait que dans le cas général pour obtenir un DL de degré n il faut partir de polynômes de degré n.

2.1.5 Équivalents

Définition 18 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \sim g(x)$ en a.

Proposition 2.10 En un point a.

1. $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow g(x) \sim f(x)$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) \sim h(x)$ alors $f(x) \sim h(x)$.
3. Si $f(x) \sim g(x)$ alors $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$.
4. Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$
5. Attention Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors en général $f_1(x) + f_2(x) \not\sim g_1(x) + g_2(x)$

Proposition 2.11
1. Si f est continue et $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \sim f(0)$ en 0.
2. Si f est dérivable, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$ alors $f(x) \sim f'(0)x$ en 0.
3. Si f est deux fois dérivable, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$ alors $f(x) \sim \frac{1}{2}f''(0)x^2$ en 0.

Remarque 2.4 On obtient des équivalents simples en prenant le premier terme non nul d'un développement limité.

Proposition 2.12 Des équivalents usuels en 0 :

$\ln(1+x) \sim x$	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$	$\sin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

2.1.6 Convexité

Définition 19 Nous avons vu que $f'(a)$ était le coefficient directeur de la tangente au point $(a, f(a))$, si ce coefficient directeur augmente lorsque a augmente on dit que f est convexe , si il diminue lorsque a augmente on dit que f est concave . Si sur un intervalle $[a, b]$, f est convexe et sur $[b, c]$, f est concave alors on dit que f change de convexité en b, et que b est un point d'inflexion de f. De même si l'on passe de concave à convexe.

Proposition 2.13 Si f est deux fois dérivable.
- f est convexe ssi $f'' \geq 0$.
- f est concave ssi $f'' \leq 0$.
- a est un point d'inflexion ssi $f''(a) = 0$ **et** f'' change de signe en a.

2.1.7 Branches infinies

Définition 20
1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que $\mathscr{C}$ possède une asymptote verticale en a, d'équation $x = a$.
2. Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique verticale en $+\infty$.
3. Si il existe un réel a tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, trois cas sont possibles :
   (a) si $\lim f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors $\mathscr{C}$ possède une asymptote en $+\infty$, d'équation $y = ax + b$.
   (b) si $\lim f(x) - ax = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction $y = ax$.
   (c) si $f(x) - ax$ n'a pas de limite, alors $\mathscr{C}$ possède une direction asymptotique de direction $y = ax$.

2.1.8 Fonction circulaires réciproques

La fonction tangente est strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, continue. Elle possède donc une fonction réciproque que l'on appelle arctangente , on remarque que ce n'est pas la réciproque de la fonction tangente mais la réciproque de la fonction tangente **restreinte à** $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a donc

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ \tan \arctan x = x \\ \underline{\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}, \ \arctan \tan x = x \end{cases}$$

On admet que la fonction ainsi définie est dérivable, on peut alors dériver l'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan \arctan x = x$ qui nous donne $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+\tan^2 \arctan x)(\arctan' x) = 1$, d'ou l'on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Exemple 2.2 $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$.

Proposition 2.14 Si $x > 0$, le complexe $x + iy$ a pour argument $\arctan \frac{y}{x}$.

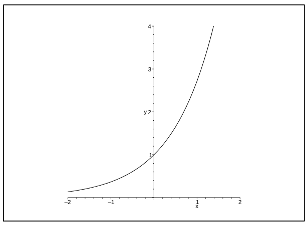
Proposition 2.15 Si $x \neq 0$, on a la relation $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\text{signe}(x)$.

De même la fonction cosinus restreinte à $[0, \pi]$ est strictement décroissante, on appelle arccosinus sa réciproque. La fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante, on appelle arcsinus sa réciproque.

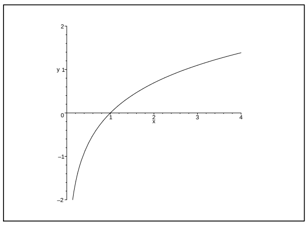
On peut montrer que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1, 1[,\ \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

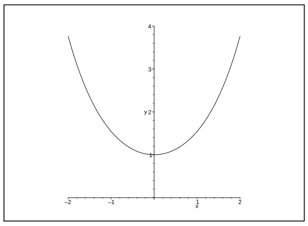
<u>**Quelques fonctions classiques :**</u>



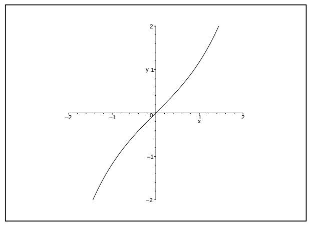
Fonction exponentielle



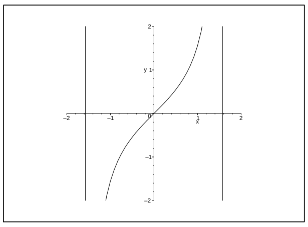
Fonction logarithme



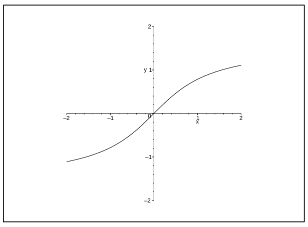
Fonction ch



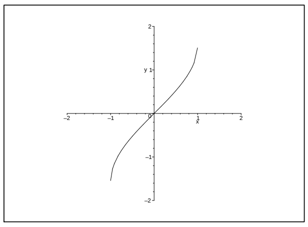
Fonction sh



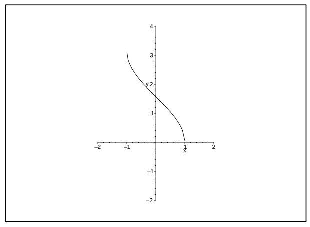
Fonction tangente



Fonction arctangente



Fonction arcsinus



Fonction arccosinus

2.2 Intégration

2.2.1 Généralités

Définition 21 Pour une fonction positive, on peut définir, l'intégrale de a à b ($a \leq b$) comme étant l'aire se trouvant sous la courbe on note cette intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ensuite on peut définir l'intégrale de fonctions négatives ou qui changent de signes en considérant $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$, on a alors $f = f^+ - f^-$ où f^+ et f^- sont des fonctions positives, on pose alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$. Pour terminer si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.5 A partir de là on peut voir un grand nombre de propriétés vues au lycée comme

- Chasles : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- La linéarité : $\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- La croissance : Si $a < b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- D'ou : Si $a < b$ et $f \leq M$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$.

Proposition 2.16 Si $a < b$,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Théorème 6 (dit théorème fondamental de l'analyse) *Si f est continue, alors la fonction F définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable de dérivée f. Il s'ensuit que toute fonction continue possède une primitive.

Remarque 2.6 Notation abusive, lorsque l'on note une intégrale sans borne, on veut noter une primitive quelconque de la fonction par exemple : $\int t^3\,\mathrm{d}t$ représente une primitive de la fonction cube ainsi on a $\int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + K$.

2.2.2 Méthodes d'intégration

Proposition 2.17 Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Théorème 7 *Intégration par partie :*
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$:

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

Preuve : On sait que $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$. On intègre cette égalité entre a et b.

$$\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

or $\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b}$. D'ou le résultat en retranchant le dernier terme de l'égalité des deux cotés de l'égalité.

Exemple 2.3 $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [\cos x]_0^\pi = -2$
Une IPP permet de trouver facilement une primitive de la fonction logarithme népérien, ainsi que de la fonction arctangente.

Théorème 8 *Changement de variable :*
Soit $u : [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et f une fonction continue sur $[c;d]$, alors

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Preuve : Posons $H(x) = \int_a^x f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t$; $F(x) = \int_{u(a)}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $g = H - F \circ u$. Calculons la dérivée de g, $g'(t) = f(u(t))u'(t) - F'(u(t))u'(t) = 0$, de plus $g(a) = 0$ donc g est la fonction nulle donc

$$g(b) = 0 = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 2.7 Souvent on utilise le théorème de changement de variable à l'envers : dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ on pose $x = h(t)$ et $\mathrm{d}x = h'(t)\,\mathrm{d}t$ on obtient alors $\int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t$. C'est-à-dire que l'on a appliqué le théorème précédent avec $u = h^{-1}$, on a donc besoin d'avoir h bijective et h^{-1} dérivable.

Exemple 2.4

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

2.2.3 Fonctions complexes

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, notons f_1 sa partie réelle et f_2 sa partie imaginaire, on a alors $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, par définition la dérivée de f est

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t)$$

de même on définit l'intégrale d'une fonction complexe par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 2.8 Ces définitions nous permettent d'avoir encore le théorème fondamental de l'analyse, (théorème 6) pour les fonctions complexes.

Proposition 2.18 Soit $g(t) = e^{f(t)}$, alors $g'(t) = f'(t)e^{f(t)}$.

Preuve : Attention ce n'est pas immédiat du tout, il faut revenir à la définition de l'exponentielle complexe

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_1(t)}\Big(\cos\big(f_2(t)\big) + i\sin\big(f_2(t)\big)\Big)$$

Il reste ensuite à dériver la partie réelle et la partie imaginaire et à retrouver la formule voulue.

Exemple 2.5 Trouver une primitive de $e^{2x}\sin x$.

$$\begin{array}{lcl}
\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x & = & \int \mathcal{I}\mathrm{m}\,(e^{2x}e^{ix})\,\mathrm{d}x \\
 & = & \mathcal{I}\mathrm{m}\,\big(\int e^{2x}e^{ix}\,\mathrm{d}x\big) \\
 & = & \mathcal{I}\mathrm{m}\,\big(\frac{1}{2+i}(e^{(2+i)x} + C\big) \\
 & = & \mathcal{I}\mathrm{m}\,\big(\frac{2-i}{5}(e^{(2+i)x}\big) + \widetilde{C} \\
 & = & \frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x) + \widetilde{C}
\end{array}$$

2.2.4 Linéarisation

Lorsqu'on doit intégrer une fonction qui est un polynôme en les fonctions sinus et cosinus, à part certain cas très simples, on peut linéariser l'expression, c'est à dire faire des opérations trigonométrique pour se ramener à des sommes de sinus et de cosinus.

Exemple 2.6 Linéariser $(\cos x)^2(\sin x)^2$.

$$\begin{array}{lcl}
(\cos x)^2(\sin x)^2 & = & (\frac{1}{2}(\cos(2x)+1))(\frac{1}{2}(1-\cos(2x))) \\
 & = & \frac{1}{4}(1-(\cos 2x)^2) \\
 & = & \frac{1}{4}(1-(\frac{1}{2}(\cos(4x)+1))) \\
 & = & \frac{1}{8}(1-\cos 4x)
\end{array}$$

Exemple 2.7 Déterminer les primitives de $\cos^3(x)$.
Utilisons un peu les complexes,

$$\begin{array}{ll}
\cos^3(x) & = (\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}))^3 \\
 & = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
 & = \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}) \\
 & = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) \\
 & = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)
\end{array}$$

finalement $\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x) + C$

2.2.5 Intégration des fractions rationnelles

Exemple 2.8 Déterminer les primitives de $\frac{2X^3+X-4}{X-1}$

$\int \frac{2t^3+t-4}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(2t^2+2t+3)(t-1)-1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int 2t^2 + 2t + 3 + \frac{-1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 + t^2 + 3t - \ln|t-1| + C$

Méthode d'intégration des fractions rationnelles (M2) :

1. Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

2. Intégrer les différents éléments simples :
   (a) $\int \frac{1}{t-a}\,\mathrm{d}t = \ln|t-a| + K$.
   (b) $\int \frac{1}{(t-a)^m}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-m}\frac{1}{(t-a)^{m-1}} + K$ pour $m > 1$.
   (c) $\int \frac{2t+a}{t^2+bt+c}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+b}{t^2+bt+c} + \frac{a-b}{t^2+bt+c}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+bt+c) + \int \frac{a-b}{(t+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$. Or cette dernière intégrale n'est rien d'autre qu'une arctangente.
   (d) $\int \frac{2t+a}{(t^2+bt+c)^m}\,\mathrm{d}t$. Le calcul pour ces éléments simples là, est plus difficile à effectuer, on peut les calculer en se ramenant à des intégrales du type $\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t$ que l'on peut calculer à l'aide d'IPP.

Exemple 2.9

$$\int \frac{x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x^5+2x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

Chapitre 3

Calcul matriciel

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre, est de se familiariser avec le calcul matriciel, pour cela on commence par un peu d'algèbre linéaire, là encore on se dépêche, on n'approfondit pas les notions. On va travailler sur des ensembles de vecteurs, appelé espace vectoriel, on peut additionner et multiplier par un réel ces vecteurs, dans ce cours les vecteurs sont notés avec une flèche : $\overrightarrow{u}$. On ne donne pas de définitions rigoureuses, on cherche à donner une idée intuitive de ces objets. Dans la suite E désigne un espace vectoriel. L'objectif de ce chapitre est clair, bien maîtriser les bases du calcul matriciel, le passage par les applications linéaires rend les choses un peu plus compliquées mais permet d'avoir une théorie intrinsèque.

3.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

On peut donner quelques exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, et plus généralement $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des suites réelles.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des polynômes.
- L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Et bientôt l'ensemble des matrices de mêmes dimensions.

Dans tout le début de ce cours il semble très important de comprendre les différentes définitions dans le cas longuement étudié au lycée du plan.

3.2.1 Définitions

Définition 22

- Une partie non vide H de E est un sous espace vectoriel si la somme de deux vecteurs quelconques de H appartient à H et le produit d'un vecteur de H par un réel quelconque appartient encore à H. (un SEV est un espace vectoriel).

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in H, \ \alpha \overrightarrow{u} \in H \end{cases}$$

- On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{e_i}$ où les k_i sont des réels quelconques.
- On appelle combinaison linéaire dégénérée des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ le vecteur nul écrit ainsi $\overrightarrow{0} = \sum_{k=1}^{n} 0\overrightarrow{e_i}$.
- Une suite de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; ....\overrightarrow{e_n})$ de E est une base de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; ....\overrightarrow{e_n}$:

$$\forall \overrightarrow{u} \ \exists!(a_1; a_2; ...a_n) \in \mathbb{R}^n; \ \overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + ... + a_n\overrightarrow{e_n}$$

les coefficients $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ainsi définis sont appelés coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; ....\overrightarrow{e_n})$.

– Une suite de vecteurs $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ de E est libre si la seule combinaison linéaire des $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ égale au vecteur nul est la combinaison linéaire dégénérée :

$$\forall(a_1;a_2;...a_n);\ a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n}=0 \Longrightarrow a_1=a_2=...a_n=0$$

– On appelle sous espace vectoriel (SEV) engendré par la famille de vecteurs $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_k})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\text{vect}(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_k})=\left\{\sum_{i=0}^{k}a_i\overrightarrow{e_i};\forall a_1;a_2;\ldots;a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

Proposition 3.1 (admise) Si E possède une base à n éléments alors toutes les bases de E possèdent exactement n éléments. On dit alors que E est de dimension n.
Si E est de dimension n et $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ est une famille libre alors $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ est une base de E.
Si E est de dimension n et $\text{vect}(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....;\overrightarrow{e_n})=E$ alors $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ est une base de E.
Si E est de dimension n et $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_k})$ est une famille libre, alors il existe $(\overrightarrow{e_{k+1}};....\overrightarrow{e_n})$ tel que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};....\overrightarrow{e_n})$ soit une base de E.
Soient H et K deux sous espaces vectoriels si $H\subset K$ et $\dim H=\dim K$ alors $H=K$.

Exemple 3.1 Si un plan contient un autre plan alors les deux plans sont confondus, si une droite contient une droite alors les deux droites sont confondues.

3.2.2 Applications linéaires

Définition 23 Une application f est linéaire si

$$\begin{cases}\forall\overrightarrow{u};\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=f(\overrightarrow{u})+f(\overrightarrow{v})\\ \forall\overrightarrow{u};\ \forall\lambda\in\mathbb{R};\ f(\lambda\overrightarrow{u})=\lambda f(\overrightarrow{u})\end{cases}$$

Définition 24 Soit f une application linéaire on définit le noyau de f et l' image de f par

$$\mathbf{ker}(f)=\{\overrightarrow{u}|f(\overrightarrow{u})=0\}$$

$$\mathbf{im}(f)=\{\overrightarrow{v}|\exists\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}\}$$

Exemple 3.2 Si $f(x,y)=x+2y$ alors $\mathbf{ker}(f)$ est la droite d'équation $x+2y=0$ et $\mathbf{im}f=\mathbb{R}$.

Exemple 3.3 La droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3x+2y=0$ est donc le noyau de l'application $f(x,y)=3x+2y$ mais c'est aussi l'image de l'application $g(t)=(t,-\frac{3}{2}t)$.

Proposition 3.2 Si f est une application linéaire alors $\mathbf{ker}(f)$ et $\mathbf{im}(f)$ sont des SEV.

Théorème 9 *dit théorème du rang*
Soit $f:E\to F$ une application linéaire, on a la relation suivante :

$$\dim(E)=\dim(\boldsymbol{ker}(f))+\dim(\boldsymbol{im}(f))$$

Preuve : Soit $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\ldots;\overrightarrow{e_k})$ une base de $\mathbf{ker}f$ et $(\overrightarrow{e_{k+1}};\ldots;\overrightarrow{e_n})$ tel que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\ldots;\overrightarrow{e_n})$ soit une base de E. $\mathbf{im}f$ est engendré par $(f(\overrightarrow{e_{k+1}});\ldots;f(\overrightarrow{e_n}))$ et on montre que la famille est libre.

Proposition 3.3 Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Preuve : Soit $(\overrightarrow{e_1};\ldots;\overrightarrow{e_n})$ une base de E, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit dans cette base de façon unique : $\overrightarrow{u}=\sum_i a_i\overrightarrow{e_i}$ donc $f(\overrightarrow{u})=\sum_i a_i f(\overrightarrow{e_i})$ qui ne dépend que des $f(\overrightarrow{e_i})$ images des vecteurs de la base.

3.3 Matrices

3.3.1 Introduction

Exemple dans $\mathbb{R}^3$ d'une application linéaire f, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3})$ deux bases. Supposons que l'on ait $\left\{\begin{array}{l} f(\overrightarrow{e_1}) = a_{1,1}\overrightarrow{e'_1} + a_{2,1}\overrightarrow{e'_2} + a_{3,1}\overrightarrow{e'_3} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = a_{1,2}\overrightarrow{e'_1} + a_{2,2}\overrightarrow{e'_2} + a_{3,2}\overrightarrow{e'_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = a_{1,3}\overrightarrow{e'_1} + a_{2,3}\overrightarrow{e'_2} + a_{3,3}\overrightarrow{e'_3} \end{array}\right.$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (u_1, u_2, u_3) dans $\mathcal{B}$, alors

$$f(\overrightarrow{u}) = f(u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} + u_3\overrightarrow{e_3}) = u_1 f(\overrightarrow{e_1}) + u_2 f(\overrightarrow{e_2}) + u_3 f(\overrightarrow{e_3})$$

En remplaçant $f(\overrightarrow{e_i})$, on obtient

$$f(\overrightarrow{u}) = (a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + a_{1,3}u_3)\overrightarrow{e'_1} + (a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + a_{2,3}u_3)\overrightarrow{e'_2} + (a_{3,1}u_3 + a_{3,2}u_3 + a_{3,3}u_3)\overrightarrow{e'_3}$$

Si on note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ la matrices des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de $f(\overrightarrow{u})$ et M la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(\overrightarrow{e_i})$ dans la base $\mathcal{B}'$, on peut définir MU de sorte que :

$$V = \begin{pmatrix} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + a_{1,3}u_3 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + a_{2,3}u_3 \\ a_{3,1}u_1 + a_{3,2}u_2 + a_{3,3}u_3 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Nous avons la relation $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$, que l'on va écrire matriciellement $V = MU$.

3.3.2 Matrice d'application linéaire

Définition 25 – On appelle matrice à p lignes et q colonnes un tableau de valeurs à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices. On notera $M = (M_{i,j})_{i,j}$ pour indiquer que le coefficient placé à la ième ligne et à la jème colonne de la matrice M est le nombre $M_{i,j}$.

– On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B} = \{e_1; \ldots; e_n\}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on dit juste que M est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.4 Soit f une application linéaire de matrice M relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si X est la matrice colonne du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$ et Y est la matrice colonne du vecteur $f(\overrightarrow{u})$ dans $\mathcal{B}'$ alors on a la relation très importante suivante :

$$Y = MX$$

Définition 26 Soit M une matrice à p lignes et q colonnes et N une matrice à q lignes et r colonnes on définit la matrice produit à p lignes et r colonnes par :

$$MN = (\sum_{k=1}^{q} M_{i,k}N_{k,j})_{i,j}$$

Exemple 3.4 Pour se rappeler facilement comment effectuer le produit, on peut positionner les deux matrices comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5+12 & 7+16 \\ 15+24 & 21+32 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$

Exemple 3.5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$

Proposition 3.5 Si M est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et N est la matrice de g relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ alors MN est la matrice de $f \circ g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$

Définition 27 Soit deux matrices M et N ayant les même dimensions alors on définit la somme $M+N$ de ces deux matrices par la somme des coefficients de même place, ainsi que le produit d'une matrice par un réel λ par :

$$M + N = (M_{i,j} + N_{i,j})_{i,j}$$

$$\lambda M = (\lambda M_{i,j})_{i,j}$$

Proposition 3.6 Si M est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et N est la matrice de g dans $\mathcal{B}$ alors $M+N$ est la matrice de $f+g$ dans $\mathcal{B}$ et λM est la matrice de λf dans $\mathcal{B}$.

Exemple 3.6 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -12 & \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1,2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3,2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$2\begin{pmatrix} 4 & 3,2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6,4 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & -22 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Proposition 3.7

1. La matrice de l'identité est dans n'importe quelle base une matrice carré avec des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. Dans la suite on notera I cette matrice, et on l'appelera matrice unité ou matrice identité .
2. Pour toute matrice X ayant n lignes $IX = X$
3. Pour toute matrice X ayant n colonnes $XI = X$
4. M, N, Q ayant des dimensions telles que leur produit est défini alors $(MN)Q = M(NQ)$ et on le note alors MNQ.
5. $M(N+Q) = MN + MQ$
6. $M(\lambda N) = \lambda(MN)$
7. En général $MN \neq NM$

Preuve : 1) $f(e_1) = e_1$ donc les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $(e_1, e_2; e_3)$ sont $(1;0;0)$ celles de $f(e_2)$ sont $(0;1;0)$ etc...
2) Cela revient à composer avec l'identité
4) Cela vient de la composition des applications $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ car $(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$.
5) et 6) Cela vient juste du fait que les applications sont linéaires : $f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x))$.

Exemple 3.7 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Définition 28 On appelle rang d'une matrice la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.

Proposition 3.8 Soit f une application linéaire de matrice M relativement à deux bases, alors le rang de M est égale à la dimension de l'image de f.

3.3.3 Matrice inverse

Rappel : on dit qu'une application f est bijective si elle possède une réciproque, c'est à dire une fonction g telle que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$ ou Id représente l'application identité. Par exemple la fonction $x \to x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors que $f : x \to x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $(-2)^2 = 2^2$, donc f ne peut pas avoir de réciproque (par contre si l'on restreint f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ elle est bijective de réciproque $\sqrt{\cdot}$)

Proposition 3.9 $f = E \to F$ une application linéaire est bijective ssi l'image d'une base est une base. Dans ce cas sa réciproque f^{-1} est aussi linéaire. En particulier une base de E et une base de F doivent avoir le même nombre d'éléments.
Si $\dim E = \dim F$ et $f \circ g = Id$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Preuve : à voir.

Définition 29 Une matrice est dite carrée si son nombre de lignes et son nombre de colonnes sont égaux.

Définition 30 Soit M une matrice carrée, M est inversible si il existe une matrice carrée N telle que $MN = I$, dans ce cas on note M^{-1} la matrice N, inverse de la matrice M.

Proposition 3.10 Soient M et N deux matrices carrées si $MN = I$ alors $NM = I$.

Proposition 3.11 Soit f une application linéaire, M sa matrice relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, f est bijective ssi M est inversible, et dans ce cas la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est M^{-1}.

Preuve : Si f est bijective notons N la matrice de f^{-1}, on a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, ce qui s'écrit matriciellement $MN = I$. Réciproquement, en posant g l'application linéaire ayant comme matrice M^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, on a $f \circ g = Id$.

Proposition 3.12 Soit f une application linéaire M sa matrice relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. M est inversible d'inverse N si et seulement si pour toutes matrices colonnes X et Y :

$$Y = MX \Longleftrightarrow X = NY$$

Preuve : Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 3.11, mais comme nous allons utiliser souvent ce résultat, redémontrons le. Si $N = M^{-1}$, $Y = MX$ entraîne $M^{-1}Y = M^{-1}MX$ d'où $M^{-1}Y = X$.

Si pour toutes matrices colonnes X et Y : $Y = MX \Longleftrightarrow X = NY$. Soit X une matrice colonne, posons $Y = MX$ on a alors $X = NMX$, pour toute matrice colonne X, donc pour toute colonne X on a $(NM - I)X = 0$, en prenant pour X une colonne avec des 0 partout et un 1 à la ième ligne $(NM - I)X$ est égale à la ième colonne de $(NM - I)$ qui est donc nulle. Finalement toutes les colonnes de $(NM - I)$ sont nulles, donc $NM = I$.

Remarque 3.1 Inverser une matrice revient donc à résoudre le système, $Y = MX$, avec X et Y quelconques, la matrice est inversible ssi ce système a toujours une unique solution

Exemple 3.8 montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = x' \\ 3x + 5y = y' \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -5x' + 2y' \\ y = 3x' - y' \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Théorème 10 *Soient M et N deux matrices inversibles alors le produit MN est inversible et* $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Preuve : $(MN)N^{-1}M^{-1} = MNN^{-1}M^{-1} = MM^{-1} = I$

3.3.4 Méthode du pivot de Gauss.

Soit S un système de n équations linéaires à p inconnues,

Définition 31 On appelle opération élémentaire sur un système, le fait d'échanger deux lignes, de multiplier une ligne par un réel non nul, ou d'ajouter à une ligne le multiple d'une autre.

Proposition 3.13 Le fait de faire une opération élémentaire sur un système ne modifie pas les solutions du système.

Remarque 3.2 Il faut faire bien attention à ne faire qu'une opération élémentaire à la fois.

Méthode du pivot de Gauss (M3) :

1. On échange les lignes de telle sorte que le coefficient en x_1, dans la première ligne soit non nul. C'est notre pivot.
2. On soustrait à la deuxième ligne un multiple de la première ligne de tel sorte que le coefficient en x_1 de la deuxième ligne soit nul.
3. On soustrait à la troisième ligne un multiple de la première ligne de tel sorte que le coefficient en x_1 de la troisième ligne soit nul. On recommence avec les lignes suivantes.
4. On échange les lignes de 2 à n de telle sorte que le coefficient en x_2, dans la deuxième ligne soit non nul.
5. On soustrait à la troisième ligne un multiple de la deuxième ligne de tel sorte que le coefficient en x_2 de la troisième ligne soit nul. On recommence avec les lignes suivantes.
6. On continue avec les autres variables, si pour une variable tous les coefficients sont nuls, on passe à la variable suivante et on regarde cette variable comme un paramètre. On trouve à la fin un système triangulaire, il suffit alors de 'remonter' :

Exemple 3.9 Résoudre $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & & -3x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_1 = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Exemple 3.10 Résoudre $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & & -3x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = \frac{1}{2}(2 - 2x_2 - x_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = 1 \end{array}\right.$$

Les solutions sont $(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, \frac{1}{2}, -1)$.

3.3.5 Matrice de passage

Définition 32 On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ matrice de l'identité associé aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Ses colonnes sont les coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.14 Si X est la matrice colonnes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$ et X' est la matrice colonnes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}'$ alors on a la relation très importante suivante :

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}X'$$

Proposition 3.15 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même espace, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, en effet

$$\forall X,\ P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}X = X$$

Pour inverser une matrice on est donc amené à résoudre un système d'équations linéaires, voyons une méthode simple et efficace de résolution :

3.3.6 Matrices d'applications linéaires et changement de bases

Proposition 3.16 f une application linéaire de matrice $M_{\mathcal{B}}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$). La matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$ est $M_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$

Preuve : Il suffit de remarquer que $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ est la matrice de l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ et d'appliquer la proposition 3.5.
On peut aussi remontrer ce résultat directement, soit X la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$, X' la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}'$, Y la matrice des coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans $\mathcal{B}$ et Y' la matrice des coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans $\mathcal{B}'$. On a les relations $Y = M_{\mathcal{B}}X$, $Y' = M_{\mathcal{B}'}X'$, $M_{\mathcal{B}}$, $X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}X'$, et $Y = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}Y$, donc pour toutes les matrices X on a

$$M_{\mathcal{B}'}X' = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X'$$

Or ceci étant vrai pour toutes les matrices colonnes X', les colonnes des deux matrices sont égales, et les matrices sont donc égales.

3.4 Déterminant

3.4.1 Cas de la dimension deux

Soit $OACB$ un parallélogramme direct du plan on cherche à calculer son aire en fonction de coordonnées des points A et B dans un repère orthonormal direct de centre O. On fixe les notations suivantes :

$$A(a,b);\ B(c;d);\ C(a+c,b+d);\ D(c,0);\ E(a+c,b)$$

avec $a,b,c,d \geq 0$, il est conseillé de faire un dessin, on a

$$\text{aire}(OACB) + \text{aire}(ODEA) + \text{aire}(AEC) = \text{aire}(ODB) + \text{aire}(DECB)$$

or $\text{aire}(AEC) = \text{aire}(ODB)$, $\text{aire}(ODEA) = bc$ et $\text{aire}(DECB) = ad$ donc finalement

$$\text{aire}(OACB) = ad - bc$$

On remarque que la formule devient $bc - ad$ dans le cas ou $OACB$ est indirect. La grandeur $ad - bc$ nous donne l'aire du parallélogramme et son sens . On remarque aussi que cette grandeur est nulle si et seulement si le parallélogramme est plat c'est à dire si les deux vecteurs sont colinéaires.

Définition 33 Le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (a,b) et (c,d) dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Cette quantité est aussi appelé le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on le note alors $\det(M)$.

Remarque 3.3 On peut alors montrer que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ et alors

$$\det(PM'P^{-1}) = \det(P)\det(M)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1})\det(M) = \det(M)$$

si f est une application linéaire de matrice M dans une base, son déterminant ne dépend pas du choix de la base on peut considérer que c'est le déterminant de f. $\det(f) = ad - bc$.

Remarque 3.4 Dans le cas d'une application linéaire f, si S est une surface d'aire A alors $f(S)$ est d'aire $|\det(f)|\text{aire}(S)$, le déterminant est au signe prés un coefficient d'accroissement des aires.

Proposition 3.17 On peut remarquer certaines propriétés du déterminant à deux lignes et deux colonnes, qui seront encore vrai en dimension quelconque :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.
2. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes.
3. Si l'on échange deux lignes alors le déterminant change juste de signe.
4. Si deux vecteurs colonnes sont colinéaires le déterminant est nul.

3.4.2 Cas général déterminant à n lignes et n colonnes

L'idée est de définir une notion de "l'hyper volume" d'un "hyper parallélépipède" en dimension n, malheureusement malgré l'idée simple qui permet de définir le déterminant, à définir rigoureusement c'est compliqué et les propriétés de ce déterminant sont assez difficiles à démontrer. C'est pourquoi nous ne les démontrerons pas toutes.

Définition 34 (existence et unicité admises) Il existe une unique application définie sur l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelé déterminant qui a les propriétés suivantes :

1. linéarité par rapport à chacune des colonnes.
2. lorsque deux colonnes sont égales le déterminant est nul.
3. $\det(I) = 1$

Remarque 3.5 Ce sont des propriétés qui semblent tout à fait raisonnable pour définir un hyper-volume.

Proposition 3.18 Le déterminant a les propriétés suivantes :

1. Le déterminant reste inchangé lorsque l'on ajoute à une colonne le multiple d'une autre colonne.
2. Lorsque l'on échange la place de deux colonnes le déterminant est multiplié par -1.

Preuve : notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M et ajoutons λ fois la colonne C_j à la colonne C_i , $\det(C_1 \dots C_i + \lambda C_j \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_i \dots C_n) + \lambda \det(C_1 \dots C_j \dots C_n)$ mais ce dernier déterminant est nul car il possède deux fois la colonne C_j.
Pour la deuxième proposition il suffit de développer le déterminant $\det(C_1 \dots C_i + C_j \dots C_j + C_i \dots C_n) = 0$.

Exemple 3.11 Montrons que l'on retrouve bien la définition de la dimension 2. Je suppose par exemple $a \neq 0$:
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c - \frac{c}{a}a \\ b & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & \frac{ad-bc}{a} \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{a}\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{a}\begin{vmatrix} a-0b & 0 \\ b-1b & 1 \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{a}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (ad-bc)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc$$

Définition 35 Soit M une matrice carrée on définit $\widetilde{M_{i,j}}$ comme étant la matrice M à laquelle on a supprimé la ligne i et la colonne j. On note $\widehat{M_{i,j}}$ le cofacteur de place (i,j) défini par $\widehat{M_{i,j}} = (-1)^{i+j}\det(\widetilde{M_{i,j}})$, et la comatrice de M, définie par $\widehat{M} = (\widehat{M_{i,j}})_{i,j}$.

Remarque 3.6 On a donc une régle des signe que l'on peut représenter par la matrice de signe
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & & & \\ & & \dots & & \end{pmatrix}$$

Exemple 3.12 Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -12 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$, alors $\widehat{M_{1,1}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -12 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ et $\widehat{M_{1,2}} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$

Proposition 3.19

1. Le déterminant d'une matrice est nulle si et seulement si ses colonnes ne forment pas une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Le déterminant du produit de deux matrices carrées est égal au produit des déterminants des deux matrices.
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
3. Développement par rapport à une colonne j :
$$\det(M) = \sum_i M_{i,j}\widehat{M_{i,j}}$$

4. Développement par rapport à une ligne i :

$$\det(M) = \sum_j M_{i,j}\widehat{M_{i,j}}$$

5. Le produit d'une matrice par la transposée de sa comatrice est au déterminant prêt égal à la matrice identité.

$$M^t\widehat{M} = \det(M)I$$

6. Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
7. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux.
8. Le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée, en particulier les propriétés qui sont vrai sur les colonnes le sont aussi sur les lignes.
9. Déterminant défini par bloc, si M est une matrice définie à l'aide de trois petites matrices telles que A et C sont carrées alors $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det A \det C$

Preuve : 1)Si les colonnes de M ne forment pas une base il existe une combinaison linéaire non dégénérée qui est nulle par des opérations sur les colonnes, on se ramène a une colonne de 0, puis par linéarité on voit que le déterminant est nul. Si les colonnes forment une base par des opérations sur les colonnes on peut se ramener à un coefficient non nul multiplicatif près au déterminant de la matrice unitée.
2) Si $\det(B) = 0$ les colonnes de B engendre un sous espace strict de $\mathbb{R}^n$ et les colonnes de AB sont formées de combinaisons linéaires des colonnes de B et n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^n$. Si $\det(B) \neq 0$ alors on définit ψ par

$$\psi(M) = \frac{\det(MB)}{\det(B)}$$

et l'on vérifie assez facilement que ψ vérifie les propriétés caractéristiques de la définition du déterminant et donc par unicité $\psi(M) = \det(M)$.
3)4) Admis
5) $(M\widehat{M}^t)_{i,i} = \sum_k M_{i,k}\widehat{M}_{i,k} = \det(M)$. Si $i \neq j$ on montre que $(M\widehat{M}^t)_{i,j} = 0$ car c'est le développement par rapport à une ligne d'un déterminant ayant deux colonnes égales.
6)D'après le point précédent si $\det(M) \neq 0$ alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t\widehat{M}$$

Si M est inversible il suffit d'appliquer le point 2) à MM^{-1} pour voir que $\det(M) \neq 0$.
7) Il suffit de développer par rapport à la première ligne et de recommencer.
8)On peut faire une récurrence sur la dimension de la matrice et remarquer que développer une matrice par rapport à une ligne correspond à développer sa transposer par rapport à une colonne.

Remarque 3.7 Comme pour le cas de la dimension 2, on peut définir le déterminant d'une application linéaire.

3.4.3 Cas de la dimension 3

De même que pour la dimension 2 le déterminant correspond au volume d'un parallélépipède défini par trois vecteurs, et d'un signe permettant de savoir si le parallélépipède est direct ou indirect. Là encore il existe une formule permettant le calcul de ce déterminant mais il est souvent préférable d'utiliser les méthodes générales du paragraphe précédent. De même que dans le plan pour une application linéaire f le déterminant est en coefficient d'accroissement des volumes.

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - idb$$

3.4.4 Méthode de Cramer

On peut utiliser les déterminants pour résoudre des systèmes de n équations linéaires à n inconnues, que l'on écrit matriciellement $Y = MX$ avec X l'inconnue. Numériquement ce n'est pas une bonne méthode, mais pour $n = 2$ et $n = 3$ elle permet d'avoir des formules lorsqu'il y a des paramètres. On note M_i la matrice M dans laquelle on a remplacé la colonne i par la matrice colonne Y.

Proposition 3.20 Si M est inversible le système $Y = MX$ a une unique solution donnée par

$$X_i = \frac{\det M_i}{\det M}$$

Preuve :

Exemple 3.13 Soit le système $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y = 12 \\ 5x + 8y = 4 \end{array} \right.$ qui s'écrit encore $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ on obtient donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{124}{59}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-48}{59}$$

3.5 Diagonalisation

3.5.1 Algèbre des matrices diagonales

Définition 36 Une matrice carrée M est diagonale si $\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow M_{ij} = 0$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.

Proposition 3.21 La somme de deux matrices diagonales est diagonale, le produit de deux matrices diagonales est diagonale.

Preuve : à faire

Proposition 3.22 Une matrice diagonale est inversible ssi il n'y a aucun 0 sur la diagonale.

Proposition 3.23 Si on multiplie une matrice carrée M par une matrice diagonale $D = (d_i)_{ii}$ à gauche : DM cela revient à multiplier chaque ligne i de M par d_i. Si on multiplie une matrice carrée M par une matrice diagonale D à droite MD cela revient à multiplier chaque colonne j de M par d_i

3.5.2 Vecteurs propres, valeurs propres

Dans une transformation du plan certaines directions sont plus importantes que d'autre, par exemple la direction de l'axe d'une réflexion, ou d'une projection. C'est cette notion que nous allons essayer de généraliser.

Définition 37 f une application linéaire, un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de f si $\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{u})$ sont colinéaires.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$, on dit que λ est une valeur propre, et que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre associé.

Remarque 3.8 Soit f une application linéaire, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur propre, tel que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ alors si $\overrightarrow{v}$ appartient à $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$; $f(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}$. La restriction de f à $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ ne fait donc que multiplier les vecteurs par le réel λ.

Exemple 3.14 Dans le plan une rotation d'angle 90 degrés ne possède pas de vecteur propre.
Pour une homothétie tous les vecteurs sont propres et il n'y a qu'une valeur propre.

Proposition 3.24 Si il existe une base de vecteurs propres de f, dans cette base la matrice D de f est diagonale, c'est-à-dire que si $i \neq j$ alors $D_{i,j} = 0$.

Preuve : $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ donc les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $e_1, e_2 ... e_n$ sont $(\lambda_1, 0, 0, 0, ...0)$ de même $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, etc...

Exemple 3.15 $f(x, y) = (8x - 6y, 9x - 7y)$ Montrer que $(1; 1)$ et $(2; 3)$ sont des vecteurs propres, quelle est la matrice de f dans cette base ?
$f(1; 1) = (2; 2)$ et $f(2; 3) = (-2; -3)$ donc la matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition 38 Soit λ une valeur propre d'une application linéaire f. On appelle sous espace propre de f associé à λ l'ensemble $E_\lambda = \{\overrightarrow{u} / f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}\}$

Remarque 3.9 Un sous espace propre est un sous espace vectoriel, c'est clair

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

idem pour $k\overrightarrow{u}$.

3.5.3 Diagonalisation

Proposition 3.25 Soient f une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base. La matrice M de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale ssi les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f.

Preuve : $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$, la ième colonne de M est constituée des coordonnées de $f(\overrightarrow{e_i})$ dans la base $\mathcal{B}$ donc

$$f(\overrightarrow{e_i}) = 0\overrightarrow{e_1} + 0... + M_{i,i}\overrightarrow{e_i} + 0..... + 0\overrightarrow{e_n} = M_{i,i}\overrightarrow{e_i}$$

donc $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $M_{i,i}$.

Réciproquement : La ième colonne de M est constituée des coordonnées de $f(\overrightarrow{e_i})$ dans $\mathcal{B}$, or $f(\overrightarrow{e_i}) = \lambda \overrightarrow{e_i}$ donc cette colonne est constituée de 0 sauf à la ligne i ou il y a λ.

Définition 39
1. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. (Une matrice est diagonale si tous les éléments qui ne sont pas sur la première diagonale sont nuls $i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0$).
2. Une matrice carrée M est diagonalisable si il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Proposition 3.26 Si M est la matrice d'une application linéaire f dans une base $\mathcal{B}$, f est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

Remarque 3.10 M est diagonalisable si il existe 2 bases B_1 et B_2 et une application linéaire f tels que la matrice de f dans B_1 soit M et dans B_2 soit diagonale.

Preuve : En effet cela vient du fait que si N est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$ alors $M = PNP^{-1}$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ avec P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. De plus toute matrice inversible est bien la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre base.

3.5.4 Méthode de diagonalisation

Pour diagonaliser une matrice M il faut donc trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres d'une application linéaire de matrice M.

Définition 40 Soit M une matrice carrée, on appelle valeur propre de M un réel λ telle qu'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $MX = \lambda X$. On dit aussi que X est un vecteur propre de M.

Remarque 3.11 Si f a M pour matrice dans une base $\mathcal{B}$. $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(\overrightarrow{u})$ a MX pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de f si et seulement si X est un vecteur propre de M.

Proposition 3.27 Les valeurs propres de M sont les λ telle que $\det(M - \lambda I) = 0$

Preuve : En effet si λ est une valeur propre alors il existe un X non nul tel que $(M-\lambda I)X = 0$ donc les colonnes de la matrice ne sont pas indépendantes $\Big($car $(M - \lambda I)X$ est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice $M - \lambda I\Big)$ et donc la matrice $(M - \lambda I)$ n'est pas inversible, son déterminant est donc nul.
Réciproquement si $\det(M-\lambda I) = 0$ les colonnes de $M-\lambda I$ ne sont pas indépendantes il existe donc une combinaison linéaire non dégénérée des colonnes qui soit égale à 0, c'est à dire un X non nul tel que $(M - \lambda I)X = 0$, donc $MX = \lambda X$, λ est une valeur propre de M.

Définition 41 Soit M une matrice carrée, on pose comme pour les applications linéaires $\mathbf{ker} M = \{X|MX = 0\}$ et $E_\lambda = \{X|MX = \lambda X\}$.

Définition 42 Soit M une matrice carrée à n lignes, on appelle polynôme caractéristique de M, $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$, c'est un polynôme de degré n.

Preuve : On montre facilement par récurrence que le déterminant d'une matrice à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont des applications affines en x est un polynôme en x de degré inférieur à n. On montre ensuite en développant par rapport à la première ligne que le terme en x^n dans le polynôme caractéristique est non nul.

Remarque 3.12 On remarque que $\det(PMP^{-1} - \lambda I) = \det(M - \lambda I)$. On peut donc définir le polynôme caractéristique d'une application linéaire puisque les déterminants des différentes matrices d'une même application linéaire sont tous égaux.

Proposition 3.28 Si la matrice M a n lignes et n colonnes et que son polynôme caractéristique a n racines réelles distinctes alors M est diagonalisable.

Preuve : A chaque valeur propre λ_i correspond un vecteur propre X_i, il reste à montrer que $(X_1, X_2, ...X_n)$ est bien une base. Montrons que c'est une famille libre

$$\sum a_i X_i = 0 \Longrightarrow (M - \lambda_2 I)(M - \lambda_3 I)...(M - \lambda_n I)(\sum a_i X_i) = 0$$

or

$$(M - \lambda_2 I)(M - \lambda_3 I)...(M - \lambda_n I)(\sum a_i X_i) = a_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)...(\lambda_1 - \lambda_n)X_1$$

donc $a_1 = 0$ et de proche en proche on montre que tous les a_i sont nuls.

Exemple 3.16 $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

Proposition 3.29 Si λ_0 est une racine du polynôme caractéristique P_M de multiplicité m, alors la dimension du sous espace propre associé à λ_0 est supérieur ou égale à 1 et inférieur ou égal à m :

$$1 \leq \dim(E_{\lambda_0}) \leq m$$

Remarque 3.13 Si λ est une valeur propre de multiplicité 1 alors $\dim(E_\lambda) = 1$, E_λ est donc une droite vectorielle, c'est le cas le plus fréquent.

Preuve : Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base de E_{λ_0}, que l'on complète en une base B de E. Dans cette base la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ & & \lambda_0 & \\ & 0 & & C \end{pmatrix}$$

avec k "λ_0" sur la diagonale, on a donc $\det(M - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I)$ donc $m \geq k$

Théorème 11 (admis) *M est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique peut se factoriser sous la forme suivante : $P_M(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ avec les λ_i différent deux à deux,et pour tout i, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$. Pour diagonaliser M il suffit de prendre comme base de vecteurs propres, une réunion de bases de chacun des sous espaces propres.*

Exemple 3.17 Si $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

3.5.5 Cas des matrices non diagonalisables

Il existe deux raisons pour lesquelles une matrice peut ne pas être diagonalisable. Le polynôme caractéristique a des racines complexes, ou un sous espace propre est de dimension strictement inférieur à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Nous allons étudier un exemple de chaque.

Remarque 3.14 Le théorème 11 possède un équivalent complexe, on factorise le polynôme caractéristique dans $\mathbb{C}$ ce que l'on peut toujours faire. Si pour tout i, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$, alors la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dans ce cas la matrice de passage et la matrice diagonale sont à valeurs complexes.

Exemple 3.18 Soit M la matrice d'une rotation d'angle θ, $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exemple 3.19 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.5.6 Cas des matrices symétriques

Définition 43 On rappelle que dans une base orthonormale le produit scalaire de deux vecteurs est donné par la somme des produits deux à deux des coordonnées. Deux plus deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

- $< \vec{u}; \vec{v} >= \sum_i u_i v_i = {}^tUV$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow < \vec{u}; \vec{v} >= 0$
- Une matrice S est symétrique si ${}^tS = S$.

Proposition 3.30 Soit S une matrice symétrique, U et V deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes alors $U \perp V$.

Preuve : $SU = \lambda U$, $SV = \mu V$.
${}^tVSU = {}^tV\lambda U = \lambda {}^tVU$. cette quantité est un réel égal à sa transposée
${}^tUSV = {}^tU\mu V = \mu {}^tUV$. or ${}^tVU = {}^tUV = \sum u_i v_i$
Finalement on a $(\mu - \lambda){}^tUV = 0$ donc ${}^tUV = 0$ donc $U \perp V$.

Théorème 12 *Soit S une matrice symétrique il existe une base orthonormale de vecteurs propres de S.*

Exemple 3.20 Diagonaliser en base orthonormale la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Index

$\sim$, 13
o, 12

affixe, 5
aire, 24
application linéaire, 19
arccosinus, 14
arcsinus, 14
arctangente, 13
argument, 5
asymptote, 13

base, 18
bijective, 21
branche parabolique, 13

changement de variable, 15
Chasles, 14
coefficient, 6
coefficient dominant, 6
cofacteur, 25
comatrice, 25
combinaison linéaire, 18
    dégénérée, 18
concave, 13
congrue, 5
conjugué, 4
continuité, 10
convexe, 13

degré, 6, 8
diagonalisable, 28
diagonalisation, 27
direction asymptotique, 13
division euclidienne, 7
DL_n, 12
décomposition en éléments simples, 8
déterminant, 24
développement limité, 12
développement par rapport à une ligne, 26

équivalents, 13
exponentielle complexe, 5

formule de Taylor, 7, 12
fraction rationnelle, 8

image, 19
intégration par partie, 15
inverse, 21
irréductible, 8

libre, 19
linéariser, 16

matrice, 20
    carrée, 22
    dans une base, 20
    identité, 21
    relativement aux bases, 20
    unité, 21
module, 4
modulo, 5
multiplicité, 6

noyau, 19
négligeable, 12

ordre, 8

partie
    imaginaire, 4
    principale, 12
    réelle, 4
point d'inflexion, 13
polynôme, 6
polynôme caractéristique, 29
primitive, 12
pôle, 8

racine, 6, 8
    carré, 6
    double, 6
    nième, 6
    simple, 6

SEV, 19
sous espace propre, 28

théorème
    de d'Alembert, 7
    des accroissements finis, 11
    des valeurs intermédiaires, 10
    du rang, 19
    fondamental de l'algèbre, 7
    fondamental de l'analyse, 15
trinôme, 7

valeur propre, 27
valeur propre de matrice, 29

vect, 19
vecteur propre, 27
    d'application linéaire, 29
    de matrice, 29