Département de Mathématiques
L1 MIPI - Semestre 1

2022/2023

Exercices de Mathématiques

Analyse 1

Table des matières

Semaine 0 : Révision : travail individuel . . . 2
Semaine 1 : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . 2
Semaine 2 : Propositions . . . 3
Semaine 3 : Ensembles . . . 4
Semaine 4 : Applications . . . 5
Semaine 5 : Calcul de Limites . . . 7
Semaine 6 : Dérivabilité . . . 8
Semaine 7 : Étude de fonctions . . . 9
Semaine 8 : Dérivées d'ordre supérieur. Développements limités . . . 10
Semaine 9 : Applications des développements limités . . . 11
Semaine 10 : Primitives . . . 12
Semaine 11 : Changement de variables dans les intégrales . . . 13
Semaine 12 : Fonctions trigonométriques réciproques . . . 13
Solution des exercices corrigés . . . 15

Semaine 0 : Révision : travail individuel

Exercice 0: A chercher seul, les résultats se trouve à la dernière page, à ne regarder qu'après avoir cherché l'exercice. Simplifier autant que possible les expressions suivantes avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}$:

$E_1=\frac{x^3+x}{1+x^2}$
$E_2=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$
$E_3=\sqrt{a^4}$
$E_4=\frac{a^{-1}+a}{a^{-1}}$
$E_5=\frac{a^2-b^2}{a+b}$
$E_6=\ln 8-\ln 2$
$E_7=\frac{\frac{1}{a}+a}{1+a^2}$
$E_8=\frac{\ln 8}{\ln 2}$

$E_9=\frac{4a-4b}{b-a}$ avec $a\neq b$
$E_{10}=\frac{2}{\frac{3}{4}}$
$E_{11}=(\sqrt{a})^6$
$E_{12}=\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$
$E_{13}=\frac{\ln a^2-\ln a}{\ln \frac{1}{a}}$ $(a\neq 1)$
$E_{14}=2\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)^2$
$E_{15}=\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^x}$
$E_{16}=e^{3x}-e^{2x}$

$E_{17}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$
$E_{18}=\frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 4}$
$E_{19}=\frac{1}{\ln 2}$
$E_{20}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-a)^2}{a}$
$E_{21}=1-\frac{\sqrt{ab}+b}{b}$
$E_{22}=\sqrt{1+a+\sqrt{4a}}$
$E_{23}=\frac{a^3+3a}{a^3+2a}$

$E_{24}=\frac{a^3}{a^2+\frac{1}{a^2}}\frac{1}{a}$
$E_{25}=\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a^2-1}}$
$E_{26}=\frac{1+\sqrt{a}}{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}$
$E_{27}=\frac{(2^a)^2}{4^a}$
$E_{28}=\frac{a^2b^3a^{-1}}{a^5b^{-2}}$
$E_{29}=\frac{((a)^b)^a}{((b)^a)^b}$

Résoudre les équations suivantes :

$E_{30}: \frac{x+3}{6}=5$
$E_{31}: \frac{3}{4}x=\frac{2}{3}$
$E_{32}: \frac{3}{4}x+1=\frac{2}{3}$
$E_{33}: x^2=9$

$E_{34}: \frac{1}{x}=\frac{2}{3}$
$E_{35}: \frac{2}{x}=\frac{1}{x+1}$
$E_{36}: \frac{x^2+5x}{x}=1$
$E_{37}: (x-1)(x+4)=0$

$E_{38}: x^2+4x+4=0$
$E_{39}: x^2+x=6$
$E_{40}: \frac{9}{x}=x$
$E_{41}: x^4+5x^3=0$

$E_{42}: x^6+x^2=-2$
$E_{43}: e^{2x}+2e^x+1=0$
$E_{44}: \frac{\frac{2}{x}}{1+x}=1$

Semaine 1 : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2+4x+3=4x^2-3x+4$.
b) $\frac{3x+4}{4x+2}=x$.
c) $x=\sqrt{3x+10}$.
d) $\frac{2x+1}{3x-4}=\frac{x+1}{x-1}$.

Exercice 2: Montrer les inégalités suivantes, pour tous x, y réels :

a) $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$,
b) Si $x>0$ alors $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$,
c) $4x^2y^2 \leq (1+x^4)(1+y^4)$,
d) $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

a) $2x^2-3x+4<4x^2+2x+9$,
b) $2x^3-5x^2+3x \leq 0$,
c) $\dfrac{2x+1}{3x+2}<0$,
d) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$,
e) $\dfrac{1}{x}>x$,
f) $|x+1|<0.1$,
g) $|x-2|>10$,
h) $|x|<|x+1|$,

Exercice 4: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $3 \leq x < 5$ et $-1 < y \leq 2$.
a) Donner des encadrements de $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x-y}$.
b) Majorer $|x|$, $|y|$, en déduire sans utiliser la question **a)** des encadrements de $|x+y|$, $|x-y|$, $|xy|$, $|\frac{1}{x}|$, $|\frac{1}{x-y}|$.

Exercice 5: On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x-a|<|a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 6: Calculer les sommes suivantes, pour un entier $n>1$, on commencera par les calculer dans le cas ou $n=2$. :

$$S_1=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad S_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} \qquad S_3=\sum_{k=1}^{n}a^k \qquad S_4=\sum_{k=1}^{n}k^4-\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4$$

Exercice 7: Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels compris entre 0 et 1, montrez par récurrence que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

On commencera par calculer les différentes expressions dans le cas où $n = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Semaine 2 : Propositions

Exercice 8: Remplir les tables de vérités suivantes, quelles propositions peut-on en déduire ?

A	B	A OU B	NON (A OU B)	NON A	NON B	NON A ET NON B
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B$ ET $B \Rightarrow A$	(NON A) OU B	(NON B) $\Rightarrow$ (NON A)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Exercice 9: En utilisant des tables de vérité, montrer que
a) $(A$ ou $B)$ et $C \Leftrightarrow \big((A$ et $C)$ ou $(B$ et $C)\big)$,
b) (non $(A$ et $B)) \Leftrightarrow$ (non A ou non B),
c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$,
d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non A ou B).
e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A).

Exercice 10: Réciproque, contraposée et négation de la proposition :
$P_x : x^3 + x - 1 \leq 0 \Rightarrow \big(x \leq 1$ ou $x^2 \geq 2\big)$.

Exercice 11: Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies :

$$(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou } Q); \qquad P \text{ ou } (P \Rightarrow Q); \qquad P \Rightarrow \big(Q \Rightarrow P\big)$$

Exercice 12: Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Exercice 13: Dans chacun des cas suivants , la proposition B est-elle une condition suffisante (CS), une condition nécessaire (CN) ou une condition nécessaire et suffisante (CNS) de la proposition A ?

a) A : "$x^2 \geq x$" et B : "$x \geq 1$"
b) A : "n impair" et B : "n^2 impair"
c) A : "$x^2 < 0$" et B : "$x \geq 10^{10}$"
d) A : "$x \in [1, 3]$" et B : "$x \in [1, 4]$"

Exercice 14: Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions :

$$(E_1) : P \text{ et} \Rightarrow Q \text{ ou } P \qquad (E_2) : 3 = 9 \qquad (E_3) : 2 \text{ et } (Q \Rightarrow P) \qquad (E_4) : P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$$

$$(E_5) : P \text{ et } Q \text{ ou } R \qquad (E_6) : P \text{ et } Q \text{ et } R \qquad (E_7) : P \text{ et ou } Q \qquad (E_8) : 2 + \frac{3}{4} \Rightarrow Q$$

Exercice 15: Montrer que les propositions "$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$" et "$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$" ne sont pas logiquement équivalentes, que pensez-vous de $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$?

Semaine 3 : Ensembles

Exercice 16: Écrire la négation des phrases suivantes :
a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n+1$.
b) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.
c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$.

Exercice 17: Pour chacune des phrases suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.
e) $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq x \leq \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0$
f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \Big(xt + y = 0 \Rightarrow x = y = 0\Big)$
g) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \Big(\forall t \in \mathbb{R}, xt + y = 0\Big) \Rightarrow x = y = 0$

Exercice 18: Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on pose $P(a,b)$ la proposition $a + b^2 = 0$.
a) La proposition $P(1,1)$ est elle vraie ? Et la proposition $P(-1,1)$?
b) La proposition "$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
c) La proposition "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
d) La proposition "$\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
e) La proposition "$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?

Exercice 19: Montrer à l'aide d'une récurrence que pour tout entier n on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Comment peut-on écrire la preuve par récurrence à l'aide de quantificateurs.

Exercice 20: Déterminer les ensembles $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+2]$, $A_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty]$, $A_3 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$, $A_4 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n+1}\right]$, $A_5 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$

Exercice 21: Soit A, B, C trois sous ensembles d'un ensemble E. Montrer que
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
c) $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

Exercice 22: Notons $A \Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
a) Montrer que $A \Delta B = B \Delta A$.
b) Montrer que $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.
c) Montrer que $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.
d) Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 23: Parmi les notations suivantes lesquelles définissent correctement un sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et exprimer leur définition avec une phrase :

$\{2 : 3\}$	$(2;4)$	$\{x^4 - 16/x \geq 2\}$	$\{x^2 + 3 \in \mathbb{R}/x \in \mathbb{R}\}$
$\{2;3;6\}$	$[2;4[$	$\{\forall x \in \mathbb{R}/x^4 - 16 > 0\}$	$(x > 2)$
$\{x \in \mathbb{R}/x^4 - 16 \leq 0\}$	$\{2\}$	$\{\exists x \in \mathbb{R}/x^4 - 16 > 0\}$	$\{x \in [2;3]/x^2 > 100\}$
$\{x^4 - 16 \leq 0/x \geq 1\}$	$\{x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R}/x^2\}$	$\{x \in \mathbb{R}/x^4 \in [-3;6]\}$

$\{x \in \mathbb{R}/\exists t \in [0;2], x^2 \leq t^2\}$ $\quad$ $[1;5] \cap [3;7] \cup [4;8]$
$\{x \in \mathbb{R}/x^4 - 16 \leq 0\} \cup [1;8]$ $\quad$ $\{x \in \mathbb{R}/x^4 \in [-3;6]$ et $\exists t \in [0,1], x^2 + t^2 \leq 1\}$

Semaine 4 : Applications

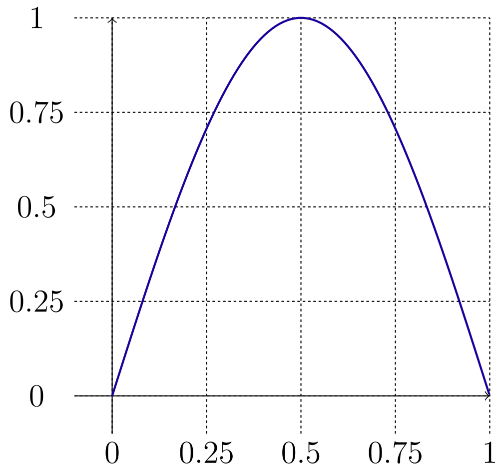
Exercice 24: Sur le repère de gauche est représentée l'application $f_1 : [0;1] \to [0;1]$ et sur celui de droite l'application $f_2 : [0;1] \to [0;1]$ ont-elles les propriétés suivantes :

$P_1 : \forall x \in [0;\frac{1}{2}],\ f_i(x) = f_i(1)$

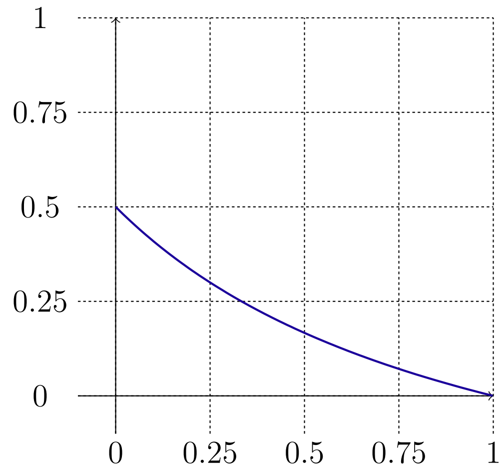
$P_2 : \exists y_0 \in [\frac{3}{4};1], \exists x \in [0;1],\ f_i(x) = y_0$

$P_3 : \forall x \in [0;\frac{1}{2}], \exists t \in [\frac{1}{2};1]\ f_i(x) = f_i(t)$

$P_4 : \forall x \in [0;1],\ f_i(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

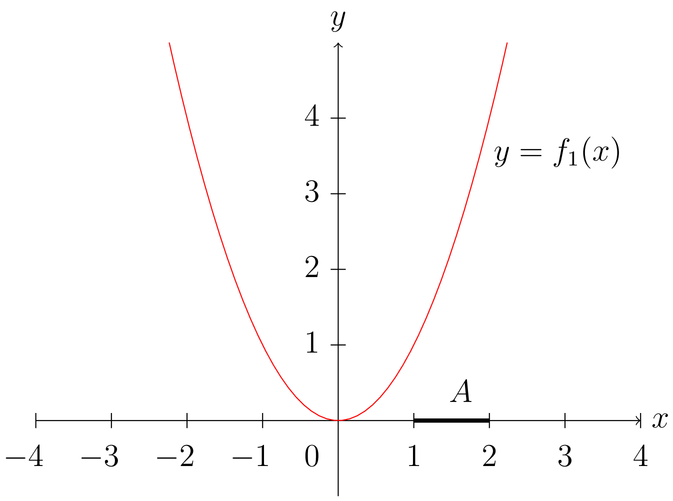


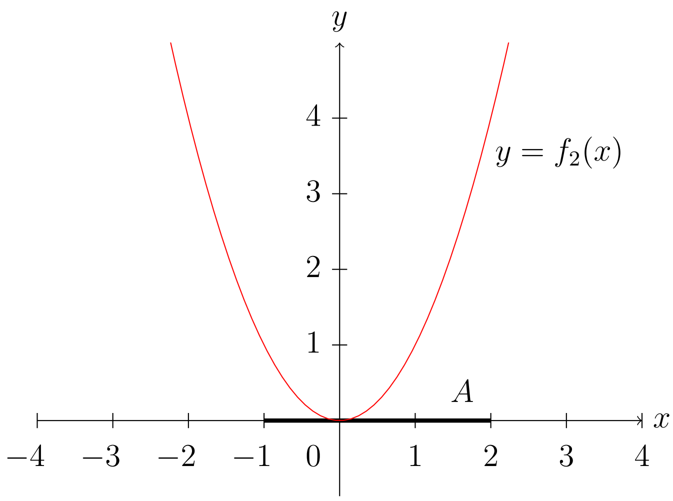
$y = f_1(x)$

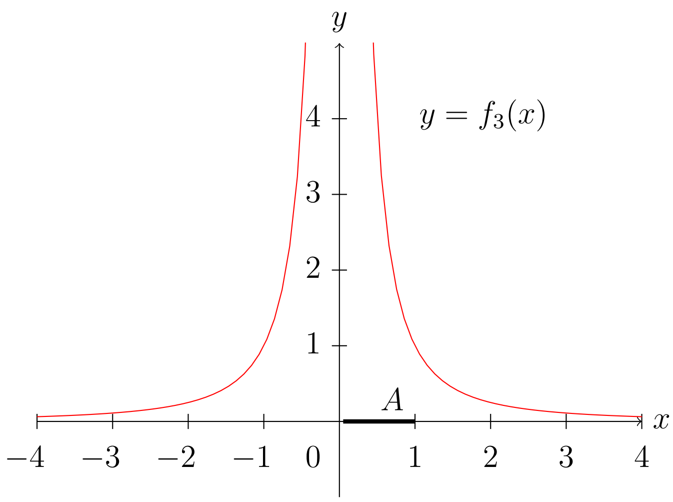


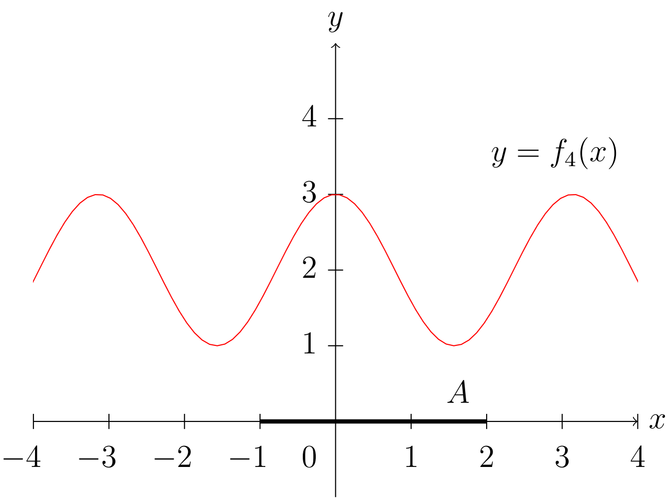
$y = f_2(x)$

Exercice 25: Dans chacun des cas suivants représenter l'image directe $f_i(A)$ de A par f_i.



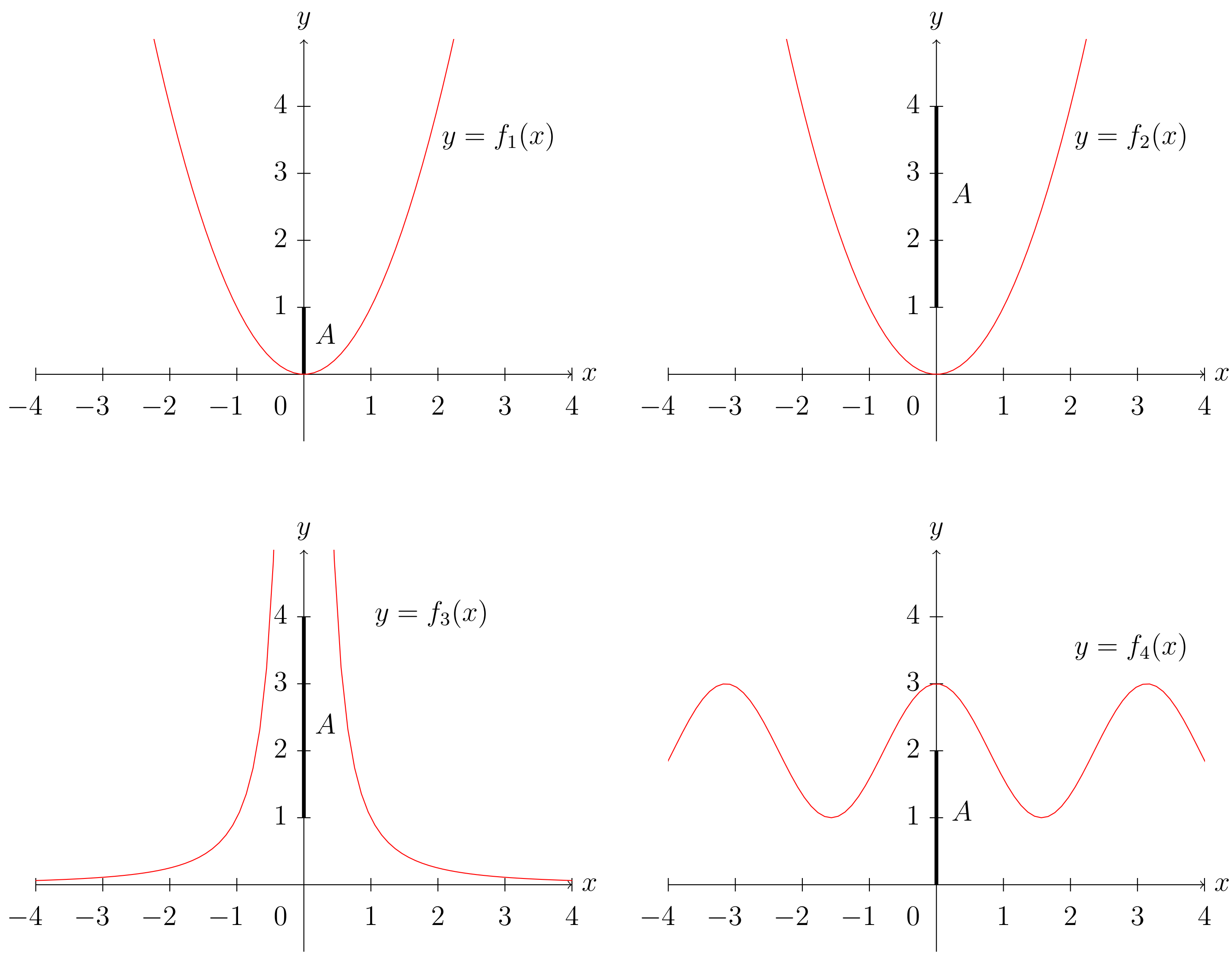






Exercice 26: Soient $A, B \subset E$, $C, D \subset F$, et f une application de E dans F. Montrer que
a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A l'aide d'un exemple montrer que l'inclusion peut être stricte.
d) $(C \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$.
e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 27: Dans chaque cas représenter l'image réciproque $f_i^{-1}(A)$ de A par f_i.



Exercice 28: Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Démontrer que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Exercice 29: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :
a) La fonction f est nulle.
b) La fonction f s'annule.
c) La fonction f n'est pas constante.
d) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.
e) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.
f) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 30: Écrire les fonctions f_i suivantes comme sommes $(+)$, produits $(\times)$ et composées $(\circ)$ des fonctions identité, cosinus, $k : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ k(x) = \frac{1}{x}$ et , et $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathbb{1}(x) = 1$.

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = \cos(x^2)$
$f_3(x) = \cos^2(x)$
$f_4(x) = \cos(\cos(x))$
$f_5(x) = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$
$f_6(x) = \cos(\frac{1}{1+x^2})$
$f_7(x) = x^2\cos(x+x^2)$
$f_8(x) = x^2\cos^2(x^2\cos(x)+\cos(x))$

Exercice 31: Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $g(x) = x^2 - 4$.
a) Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f \circ g\,(1)$, $f \circ g\,(-1)$, $g \circ f\,(1)$, $g \circ f\,(-1)$.
b) Déterminer $g \circ f\,(x)$, $f \circ g\,(x)$, $f \circ f\,(x)$.

Exercice 32: Montrer que la fonction définie par $\dfrac{\sin(x)}{4} + \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Même question pour celles définies par $\dfrac{\cos(x) + 4\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$ et $\dfrac{x^2}{3+2x^2}\cos(5x-1)$.

Exercice 33: Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose que f et g sont monotones (c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante) que dire de la monotonie de $f \circ g$ et de $f + g$ et de fg.

Semaine 5 : Calcul de Limites

Exercice 34: Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x-7}{3x^3-2x^2+5}$.
b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x^3+x+1}{2x^3+x-4}$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2+3x}$.
d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (x^2-x)\ln x$.
e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x^3 + \ln(x)$.
f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{x+1}$.
g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.
i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x} + \ln(x)$.

Exercice 35: Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{2x+3x^2}$.
b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^4(x)}{x^3\ln(1+x)}$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.
d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.
e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)}$.
f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{4}{x}\right)$.
g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x+x^3)}{x}$.
h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{2x}+x^2)}{x}$.
i) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$.
j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$.
k) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{1-x^4}$.
l) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{2}{x-1} - \frac{6}{x^3-1}$.

Exercice 36: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{2x} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sin\big(3\sin(2x)\big)}{x} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln\big(\cos(5x)\big)}{\sin x^2} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln\big(5\cos(x)\big)}{\sin^2 x}$$

Exercice 37: Calculer, si elles existent, les limites suivantes :(A chercher seul, les résultats sont données à la fin.)

$l_1 = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2x^3-3x^2+7x}{3x^3+6x}$
$l_2 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-3x^2+7x}{3x^3+6x}$
$l_3 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+7}$
$l_4 = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+e^{2x}+e^{-x}}{x^4}$
$l_5 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^{2x}+e^{-x}}{x^4}$
$l_6 = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+e^{2x}-1}{x}$
$l_7 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^{2x}-2e^x}{x^4}$
$l_8 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{3x}+2x)}{x}$
$l_9 = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(e^{3x}+2x)}{x}$
$l_{10} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{5x^2-3\ln(1+5x)}{x}$
$l_{11} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{5x^2-3\ln(1+5x)}{2\sin(3x)}$
$l_{12} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}}{x+1}$
$l_{13} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$
$l_{14} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$
$l_{15} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$
$l_{16} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(5x)}$
$l_{17} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}+2x^2+5}$
$l_{18} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}+2x^2}$
$l_{19} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3x+\ln(1+x)}{\sin x}$
$l_{20} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x-x}-\cos(x)}{x^2}$

$l_{21}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{x}$

$l_{22}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)\sin(2x)}{x^2+x^3}$

$l_{23}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(2x)}$

$l_{24}=\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\ln(\frac{x+2}{x})}$

$l_{25}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{(\sin(3x))^2}$

$l_{26}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin x)}{2x+3x^3}$

$l_{27}=\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$

$l_{28}=\lim\limits_{x\to 0} x^x$

$l_{29}=\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x-3}-\frac{4x^2+1}{2x+1}$

$l_{30}=\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{2x+1}}-\frac{3x^2+1}{3x+2}$

$l_{31}=\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{2}x+5e^{3x})\sin(e^{-3x})$

$l_{32}=\lim\limits_{x\to +\infty} (2^x+3x^7)^{\frac{1}{x+2}}$

$l_{33}=\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^x+x}-\sqrt{e^x+x^2}$

$l_{34}=\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^x+x}-\sqrt{e^{2x}+x^2}$

$l_{35}=\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^4}{1-x^5}$

Exercice 38: Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $a, l \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

c) Donner un exemple de f pour laquelle $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 1$, et f ne possède pas de limite en 0.

Semaine 6 : Dérivabilité

Exercice 39: A chercher seul, les résultats se trouve à la dernière page, à ne regarder qu'après avoir cherché l'exercice. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x)=x^2-x+3$

$f_2(x)=e^{3x}$

$f_3(x)=\cos(2x+3)$

$f_4(x)=x\ln x$

$f_5(x)=\frac{1}{x^2+3}$

$f_6(x)=x^2e^x$

$f_7(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$

$f_8(x)=\frac{xe^x}{1+x}$

$f_9(x)=\ln(1+x^2)$

$f_{10}(x)=(x+3)^7$

$f_{11}(x)=(5x+3)^7$

$f_{12}(x)=\frac{1}{(x+2)^7}$

$f_{13}(x)=\tan x$

$f_{14}(x)=x\sqrt{x}$

$f_{15}(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

Exercice 40: En utilisant la définition, calculer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes.

a) $f(x) = mx + p$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 41: Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$f_1(x) = x^3e^x$

$f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$

$f_3(x) = \cos(3x-1)$

$f_4(x) = \ln(1+x^2)$

$f_5(x) = \ln(1+e^{5x})$

$f_6(x) = \sin(x^5+2x)$

$f_7(x) = \frac{1}{(2x-3)^9}$

$f_8(x) = \sin(\cos(x))$

$f_9(x) = \exp(\exp(3x))$

$f_{10}(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

$f_{11}(x) = 2^x$

$f_{12}(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

$f_{13}(x) = \sin\left(\dfrac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$

Exercice 42: Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Calculer f_i' en fonction de g' dans les cas suivants

$$f_1(x) = g(x^2+3x); \qquad f_2(x) = g(xg(x)); \qquad f_3(x) = \frac{g(x^2)}{g(x)^2+1}$$

Exercice 43: Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2+3x)$. En quel point la fonction g' s'annule-t-elle ?

Exercice 44: Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}^*$, et calculer leur dérivée.

b) Étudier la dérivabilité de f et g en 0.

c) Comparer $g'(0)$ et la limite de g' en 0.

<u>**Exercice 45:**</u> Soient g et h deux fonctions dérivables en 0 et telles que $g(0) = h(0) = 0$ et $h'(0) \neq 0$, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(0)}{h'(0)}$$

En déduire la limite en 0 de la fonction f définie par $\frac{(\cos x)-1}{\sin x}$.

<u>**Exercice 46:**</u> Soit $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable telle que sa réciproque soit aussi dérivable, montrer que $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$ puis que

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

<u>**Exercice 47:**</u> Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{1+x^2} & \text{si} \quad x < 1, \\ 2e^{(1-x)(1+x)} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$

f est-elle dérivable en 1 ? Étudier les extrema de f.

<u>**Exercice 48:**</u> En utilisant uniquement les formules donnant la dérivée d'un produit, d'une composée et la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, retrouver la formule de la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{U}{V}\right)'$.

Semaine 7 : Étude de fonctions

<u>**Exercice 49:**</u> Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$. Étudier le sens de variation, les limites en $\pm\infty$ de f, les extrema de f, ainsi que le sens de variation de sa dérivée. Représenter f rapidement. (De même étudier les extrema de $g(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$)

<u>**Exercice 50:**</u> Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
a) Étudier la parité de de f, ses variations, f est-elle bornée ?
b) Étudier les extrema de f.
c) Étudier le signe de la dérivée seconde de f, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

<u>**Exercice 51:**</u> Soit f la fonction définie par la formule $\dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.
a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Étudier les variations de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
c) Déterminer la tangente en $(0, 1)$ à la courbe représentative de f.
d) Étudier les asymptotes à la courbe représentative de f.
e) Représenter rapidement f.

<u>**Exercice 52:**</u> Soit f la fonction définie par la formule $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x}$.
a) Ensemble de définition de f.
b) Montrer que f est périodique.
c) Comparer $f(x)$ et $f(x + \pi)$, que peut on en déduire pour la représentation graphique de f.
d) Étudier les variations de f. On pourra montrer que $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
e) Déterminer la tangente à la courbe en $(0; 1)$.
f) Représenter rapidement la fonction f.

<u>**Exercice 53:**</u> Soit la formule $\dfrac{x}{1 + \sqrt{4 - x^2}}$.
a) Pour quels x a-t-elle un sens ? Elle définit alors une fonction f sur un intervalle I.
b) Étudier la parité de de f.
c) Calculer la dérivée de f sur $\mathring{I}$. f possède-t-elle une dérivée à gauche en 2 ?
d) Étudier les variations de f. f est-elle bornée ?

e) Déterminer les tangentes à la courbe représentative de f en $(0; f(0)$ et en $(2, f(2))$?

Exercice 54: Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) f possède-t-elle une dérivée à droite en 0 ?
b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
c) On pose $g(x) = x\, f(x)$ et $h(x) = x + 1 - \ln x$

1. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$.
2. En déduire les variations de g.
3. Montrer que la courbe représentative de g ne possède pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Semaine 8 : Dérivées d'ordre supérieur. Développements limités

Exercice 55: Soient f et g deux fonctions dont le développement limité à l'ordre 1 en 0 est donné par

$$f(x) = 1 + 3x + x\varepsilon_1(x), \quad g(x) = 2 + x + x\varepsilon_2(x).$$

Donner, sans utiliser les propositions du cours, des développements limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions suivantes

$$h_1 = f + 4g, \quad h_2 = fg, \quad h_3 = f^2, \quad h_4 = x \mapsto f(5x), \quad h_5 = f \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{id})$$

Exercice 56: Pour chaque fonction f_i calculer son développement limité en 0 à l'ordre n_i.

- $f_1(x) = (1 + 2x)\ln(1 + x)$, $n_1 = 3$.
- $f_2(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 + x)$, $n_2 = 3$.
- $f_3(x) = \frac{1+2x}{1-x}$, $n_3 = 3$.
- $f_4(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 + 3x)\sqrt{1 + 2x}$, $n_4 = 2$.
- $f_5(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}$, $n_7 = 3$.
- $f_6(x) = \frac{\cos(x)}{1+2x}$, $n_7 = 3$.

Exercice 57: Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide de développements limités.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1 + x)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\frac{2}{x} - \sin\frac{2}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2 \Big(\ln(x^2 + 3) - 2\ln x\Big)$$

Exercice 58: Soit $r > 0$, $a \in \mathbb{R}$, et $f :]a - r, a + r[\to \mathbb{R}$.
a) Pour quels x, l'égalité $g(x) = f(a + x)$ a-t-elle un sens ? On définit g ainsi.
b) Montrer que si f est 3 fois dérivable alors g est 3 fois dérivable et écrire la formule de Taylor Young pour la fonction g. Quelle formule peut-on en déduire pour $f(a + x)$.
c) On dit que f possède un développement limité d'ordre 3 en a, si il existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon :]a - r, a + r[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]a - r, a + r[, f(t) = a_0 + a_1(t - a) + a_2(t - a)^2 + a_3(t - a)^3 + (t - a)^3\varepsilon(t)$$

avec $\lim_a \varepsilon = 0$.
Montrer que si f est trois fois dérivable elle possède un DL_3 en a.
d) Déterminer un DL_3 de la fonction ln en 1.

Exercice 59: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1} \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$

Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.

Exercice 60: Soit f la fonction définie pour $x \in]0; +\infty[$, par la formule $x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$.

a) Déterminer les limites aux extrémités de l'ensemble de définition.
b) Étudier les variations de f, on pourra calculer et factoriser $f'(x)$ puis étudier la fonction définie par l'un des termes de la factorisation.
c) Étudier la courbe au voisinage de 0 : limite, demi tangente ?
d) Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f possède une asymptote oblique, étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
e) Représenter $\mathcal{C}$.

Semaine 9 : Applications des développements limités

Exercice 61: Pour chaque fonction f_i calculer son développement limité en 0 à l'ordre n_i.

- $f_1(x) = \ln(1 + x + x^2)$, $n_1 = 3$.
- $f_2(x) = \sin(x\mathrm{e}^x)$, $n_2 = 3$.
- $f_3(x) = \ln(1 + x\cos(x))$, $n_3 = 4$.
- $f_4(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, $n_4 = 4$.
- $f_5(x) = \frac{\cos^2(x)}{1+x+x^2}$, $n_5 = 4$.
- $f_6(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$, $n_6 = 2$.

Exercice 62: Calculer les développements limités suivants : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en 1 à l'ordre 2, $g(x) = \sin(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 2 et $h(x) = \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 6.

Exercice 63: Dans un examen récent, on demandait de donner le développement limité de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$ à l'ordre 2 en 0. Un étudiant a donné comme réponse

$$f(x) = \frac{5}{2} - x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Expliquer pourquoi le correcteur s'est immédiatement rendu compte que le résultat était faux. Expliquer comment l'étudiant a trouvé ce résultat et pourquoi sa méthode ne marche pas ! (Indication : attention au DL de l'exponentielle).

Exercice 64: Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide de développements limités.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 65: Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, si elle existe, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}.$$

Exercice 66: Soit h et f les fonctions définies par $h(x) = e^x + x^2 - x$ et $f(x) = \ln(e^x + x^2 - x)$. Étudier h, on pourra être amené à calculer h'', montrer que h est positive. Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier les variations de f, étudier l'existence d'éventuelles asymptotes. Représenter f.

Exercice 67: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + x + 16}{x}}$.

a) Déterminer les limites aux extrémités de l'ensemble de définition.

b) Étudier les variations de f.
c) Déterminer le minimum de f.
d) Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f possède deux asymptotes que l'on déterminera.
e) Déterminer la position de $\mathcal{C}$, par rapport à l'asymptote oblique.

Exercice 68: Calculer les limites suivantes (A chercher seul, les résultats sont donnés à la fin.)

$l_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$	$l_5=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2\sin(x)}{x^2}$	$l_9=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(\cos(x))+\sin(x^2)}{x^4}$	$l_{13}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}$
$l_2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$	$l_6=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x}-e^{3x^2}\right)$	$l_{10}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x^2)}{x^2\tan 2x}$	$l_{14}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x\sin x}\right)}$
$l_3=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{3x}}{\sin(2x)}$	$l_7=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\ln(1+x))-\sin x}{x\sin(2x)}$	$l_{11}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	$l_{15}=\lim\limits_{x\to+\infty}$
$l_4=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cos x-\sin 3x}{x^3}$	$l_8=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt[3]{x^3+1})$	$l_{12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	$\left(\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x}-\left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{1}{2}x}\right)x$

Semaine 10 : Primitives

Exercice 69:
Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$F_1(x)=\int^x 3t^4-2t^3+t\ \mathrm{d}t \qquad F_2(x)=\int^x \frac{3}{t^3}\ \mathrm{d}t \qquad I_3=\int_1^2 3t\sqrt{t}\ \mathrm{d}t \qquad F_4(x)=\int^x \frac{5t^3+1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$$

$$I_5=\int_0^2 \frac{3t}{t^2+4}\ \mathrm{d}t \qquad F_6(x)=\int^x \frac{e^t}{e^t+3}\ \mathrm{d}t \qquad F_7(x)=\int^x t\cos(t^2)\ \mathrm{d}t \qquad F_8(x)=\int^x \frac{At+B}{t+D}\mathrm{d}t$$

$$I_9=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\ \mathrm{d}t \quad I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{t}{3}\right)\sin\left(\frac{t}{3}\right)\ \mathrm{d}t \qquad F_{11}(x)=\int^x \cos^3(2t)\sin(2t)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 70:
Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 te^{2t}\ \mathrm{d}t \qquad F_2(x)=\int^x (t^2-2)e^{\frac{1}{2}t}\ \mathrm{d}t \qquad F_3(x)=\int^x t\sin(3t)\mathrm{d}t$$

$$I_4=\int_1^2 t^2\ln t\ \mathrm{d}t \qquad F_5(x)=\int^x t^2e^{t^2}\ \mathrm{d}t \qquad F_6(x)=\int^x t^2\sin(3t^2)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 71: Fonctions paires et impaires
a) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *paire* si, pour tout x, $f(-x)=f(x)$. Montrer que si une fonction f est paire et continue, alors pour tout a

$$\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$$

On pourra commencer par étudier la fonction définie par $H(a)=\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t$
b) Calculez : $\int_{-2}^2 t^2\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\ \mathrm{d}t$, $\int_{-1}^1 |t|^3\ \mathrm{d}t$.
c) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *impaire* si, pour tout x, $f(-x)=-f(x)$. Montrer que si une fonction f est impaire et continue, alors pour tout a,

$$\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t=0$$

puis calculez : $\int_{-2}^2 t^3\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin(t)\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{t}{3}\sin^2 t\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan(t)\ \mathrm{d}t$.
d) Soit f une fonction continue telle que pour tout réel x, $\int_{-x}^x f(t)\ \mathrm{d}t=0$, montrer que f est impaire.

Exercice 72: **Fonctions périodiques** Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *périodique de période* T si, pour tout x réel, $f(x+T)=f(x)$.

a) Montrer que pour une fonction f, continue, périodique de période T, $\int_x^{x+T} f$ ne dépend pas de x : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t$$

b) Montrez aussi que

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\ \mathrm{d}t$$

c) Donnez des exemples de fonctions périodiques

d) Calculez : $\int_0^{2\pi}\cos(t)\ \mathrm{d}t$, $\int_{\pi/2}^{5\pi/2}\cos(t)\ \mathrm{d}t$, $\int_0^{\pi}\cos(2t)\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2t)\ \mathrm{d}t$, $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos(2t)\ \mathrm{d}t$.

e) On veut calculer

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{2+\cos t\sin^2 t}\ \mathrm{d}t\ .$$

Montrez que cette intégrale est égal à $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{2+\cos t\sin^2 t}\ \mathrm{d}t$ et conclure.

Semaine 11 : Changement de variables dans les intégrales

Exercice 73: Calculer les intégrales et les primitives suivantes. On pourra utiliser un changement de variable.

$$I_1=\int_1^4\frac{1}{t+\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \qquad F_2(x)=\int^x\frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t \qquad F_3(x)=\int^x t\cos(2t^2+1)\ \mathrm{d}t$$

$$I_4=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^3\ \mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad F_5(x)=\int^x e^{2t}\sqrt{e^t+1}\ \mathrm{d}t \qquad I_6=\int_1^{e^4}\frac{\sqrt{1+2\ln t}}{t}\ \mathrm{d}t \qquad I_7=\int_1^4\ln\left(1+\sqrt{t}\right)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 74: On suppose qu'une fonction f continue sur $[0,b]$ vérifie :

$$\forall x\in[0,b]\quad f(b-x)=f(x)$$

a) Quelle est la signification de cette relation pour la courbe représentative de f ?

b) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, la relation suivante :

$$\int_0^b xf(x)\ \mathrm{d}x=\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

c) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi} x\ \sin^3 x\ \mathrm{d}x$

Exercice 75: A chercher seul, Calculer les intégrales suivantes.

$E_1=\int_1^e x(\ln x)^2\ \mathrm{d}x$	$E_3=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x$	$E_5=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos x)\tan x\ \mathrm{d}x$
$E_2=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ \mathrm{d}x$	$E_4=\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$	$E_6=\int_{-1}^2\frac{1}{3-\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x$

Semaine 12 : Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 76: Pour chacune des applications suivantes dire si elle est injective, surjective, bijective :

$$\begin{array}{lllll} f_1 & : & [0;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \cos t \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f_3 & : & [-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi] & \to & [-1;1] \\ & & t & \mapsto & \cos t \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f_5 & : & [-\frac{1}{4}\pi;\frac{1}{4}\pi] & \to & [-1;1] \\ & & t & \mapsto & \sin t\cos t \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} f_2 & : & [-\pi;\pi[& \to & [-1;1] \\ & & t & \mapsto & \cos t \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f_4 & : & [0;\pi] & \to & [-1;1] \\ & & t & \mapsto & \cos t \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f_6 & : & \mathbb{R}^+ & \to & [0;1] \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{1+t^2} \end{array}$$

Exercice 77: Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
5. Donner un exemple de fonctions telles que $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.
6. Donner un exemple de fonctions telles que $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Exercice 78: Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ on a $\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 79: Calculer les primitives et intégrales suivantes ($a \neq 0$) :

$$F_1(x) = \int^x \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \quad I_2 = \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad F_3(x) = \int^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$F_5(x) = \int^x \frac{1}{\sqrt{e^{-2t}-4}}\,\mathrm{d}t \qquad F_6(x) = \int^x \sqrt{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad F_7(x) = \int^x \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt[3]{t}+1)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 80: Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan x$.
a) Dériver h, en déduire une expression simplifiée de $h(x)$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$
b) Déterminer un DL_3 en 0 de la fonction arctangente.
c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\arctan x$, étudier les variations de f.
d) Montrer que la courbe représentative de f possède une asymptote en $+\infty$, on déterminera son équation ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 81: Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \arctan(\frac{1-x^2}{2x})$ en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Introduction aux primitives de fractions rationnelles

Exercice 82: Calculer en se ramenant à une arctangente

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puis} \qquad \int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en déduire} \qquad \int^x \frac{t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\ .$$

Exercice 83: Soient a, b, c, d quatre réels tq $a \neq b$, montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b\},\ \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

Montrer ensuite que $\alpha = \dfrac{ca+d}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{cb+d}{b-a}$

En déduire $\displaystyle\int^x \frac{t+2}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{5t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 84: Montrer en posant $u = \cos t$ que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

En déduire la valeur de l'intégrale.

Solution des exercices corrigés

Solution de l'exercice 0 : $E_1 = x$; $E_2 = \frac{1}{12}$; $E_3 = a^2$; $E_4 = 1 + a^2$; $E_5 = a - b$; $E_6 = \ln 4$; $E_7 = \frac{1}{a}$; $E_8 = 3$; $E_9 = -4$; $E_{10} = \frac{8}{3}$; $E_{11} = a^3$; $E_{12} = \sqrt{a}$; $E_{13} = -1$; $E_{14} = 4$; $E_{15} = e^{2x} + e^x$; $E_{16} = e^{3x} - e^{2x}$; $E_{17} = 5$; $E_{18} = \frac{1}{4}$; $E_{19} = \frac{1}{\ln 2}$; $E_{20} = (1 - \sqrt{a})^2 = 1 + a - 2\sqrt{a}$; $E_{21} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$; $E_{22} = 1 + \sqrt{a}$; $E_{23} = \frac{a^2+3}{a^2+2}$; $E_{24} = \frac{a^4}{a^4+1}$; $E_{25} = a - 1$; $E_{26} = \sqrt{a}$; $E_{27} = 1$; $E_{28} = \frac{b^5}{a^4}$; $E_{29} = (\frac{a}{b})^{ab}$; $(E_{30})27$; $(E_{31})\frac{8}{9}$; $(E_{32}) - \frac{4}{9}$; (E_{33}) 2 solutions 3 et -3; $(E_{34})\frac{3}{2}$; $(E_{35}) - 2$; $(E_{36}) - 4$; (E_{37}) 2 solutions 1 et -4; $(E_{38}) - 2$; (E_{39}) 2 solutions 2 et -3 ; (E_{40}) 2 solutions 3 et -3 ; (E_{41}) 2 solutions 0 et -5 ; (E_{42}) Aucune solution ; $(E_{43})0$ (on pourra poser $X = e^x$) ; (E_{44}) 2 solutions 1 et -2;

Solution de l'exercice 37 : $l_1 = \frac{7}{6}$; $l_2 = \frac{2}{3}$; $l_3 = +\infty$; $l_4 = +\infty$; $l_5 = +\infty$; $l_6 = 2$; $l_7 = +\infty$; $l_8 = 3$; $l_9 = 5$; $l_{10} = -15$; $l_{11} = -\frac{5}{2}$; $l_{12} = 2$; $l_{13} = 0$; $l_{14} = 0$; $l_{15} = \frac{8}{3}$; $l_{16} = \frac{3}{5}$; $l_{17} = 0$; $l_{18} = 0$; $l_{19} = 4$; $l_{20} = +\infty$; $l_{21} = \frac{1}{2}$; $l_{22} = 6$; $l_{23} = \frac{1}{4}$; $l_{24} = \frac{1}{2}$; $l_{25} = \frac{1}{3}$; $l_{26} = \frac{3}{2}$; $l_{27} = e$; $l_{28} = 1$; $l_{29} = 7$; $l_{30} = \frac{7}{6}$; $l_{31} = 5$; $l_{32} = 2$; $l_{33} = 0$; $l_{34} = -\infty$; $l_{35} = \frac{4}{5}$;

Solution de l'exercice 39 : $f_1'(x) = 2x - 1$; $f_2'(x) = 3e^{3x}$; $f_3'(x) = -2\sin(2x + 3)$; $f_4'(x) = 1 + \ln x$; $f_5'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$; $f_6'(x) = (2x+x^2)e^x$; $f_7'(x) = \frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2}$; $f_8'(x) = \frac{(1+x+x^2)e^x}{(1+x)^2}$; $f_9'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $f_{10}'(x) = 7(x+3)^6$; $f_{11}'(x) = 35(5x+3)^6$; $f_{12}'(x) = -7(x+2)^{-8}$; $f_{13}'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f_{14}'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}}$; $f_{15}'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$;

Solution de l'exercice 68 : $l_1 = -\frac{1}{2}$; $l_2 = 2$; $l_3 = -\frac{3}{2}$; $l_4 = 3$; $l_5 = -2$; $l_6 = -\frac{5}{2}$; $l_7 = -\frac{1}{2}$; $l_8 = \frac{1}{3}$; $l_9 = -\frac{1}{6}$; $l_{10} = \frac{1}{2}$; $l_{11} = \sqrt{15}$; $l_{12} = 5$; $l_{13} = \frac{2}{3}$; $l_{14} = e^{-\frac{1}{6}}$; $l_{15} = \frac{15}{8}e^{\frac{3}{2}}$;