



# Exercices de Mathématiques

## UE : Série

Licences de sciences 2<sup>ème</sup> année :

- Licence mathématiques
- Licence informatique
- Double licence MI/MP
- CUPGE

Alexandre MIZRAHI

## Semaine 1 : Compléments sur les suites

**Exercice 1 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{l}
 l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x}{3x^3 + 6x} \\
 l_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x}{3x^3 + 6x} \\
 l_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{x\sqrt{x+7}} \\
 l_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^{2x} + e^{-x}}{x^4} \\
 l_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{2x} + e^{-x}}{x^4} \\
 l_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^{2x} - 1}{x} \\
 l_7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{2x} - 2e^x}{x^4} \\
 l_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{3x} + 2x)}{x}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 l_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{3x} + 2x)}{x} \\
 l_{10} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3 \ln(1+5x)}{x} \\
 l_{11} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3 \ln(1+5x)}{2 \sin(3x)} \\
 l_{12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}{x+1} \\
 l_{13} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(7x)}{x\sqrt{x+3}} \\
 l_{14} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(7x)}{x\sqrt{x+3}} \\
 l_{15} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(7x)}{x\sqrt{x+3}} \\
 l_{16} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(5x)} \\
 l_{17} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x+2x^2+5}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 l_{18} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x+2x^2}} \\
 l_{19} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \ln(1+x)}{\sin x} \\
 l_{20} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^x - x} - \cos(x)}{x^2} \\
 l_{21} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} \\
 l_{22} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) \sin(2x)}{x^2 + x^3} \\
 l_{23} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(2x)} \\
 l_{24} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\ln(\frac{x+2}{x})} \\
 l_{25} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{(\sin(3x))^2} \\
 l_{26} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3 \sin x)}{2x + 3x^3}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 l_{27} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x \\
 l_{28} = \lim_{x \rightarrow 0} x^x \\
 l_{29} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x-3} - \frac{4x^2 + 1}{2x+1} \\
 l_{30} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{2x+1}} - \frac{3x^2 + 1}{3x+2} \\
 l_{31} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2}x + 5e^{3x}) \sin(e^{-3x}) \\
 l_{32} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3x^7)^{\frac{1}{x+2}} \\
 l_{33} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x + x} - \sqrt{e^x + x^2} \\
 l_{34} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x + x} - \sqrt{e^{2x} + x^2} \\
 l_{35} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^4}{1-x^5}
 \end{array}$$

**Exercice 2 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer des développements limités d'ordre  $n_i$  en 0 des fonctions  $f_i$  définies par :

$$\begin{array}{l}
 f_1(x) = \cos x + \sin x \quad (n_1 = 3) \\
 f_2(x) = e^{2x} \quad (n_2 = 2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_3(x) = \frac{1}{1-3x} \quad (n_3 = 2) \\
 f_4(x) = \frac{e^x}{1-x} \quad (n_4 = 3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_5(x) = \cos \sqrt{x} \quad (n_5 = 2) \\
 f_6(x) = e^{\sin x} \quad (n_6 = 3)
 \end{array}$$

**Exercice 3 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{u_n + u_{n+1}}$

- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Montrer par l'absurde que la suite  $(u_n)$  ne converge pas.
- La suite  $(u_n)$  possède-t-elle une limite ?

**Exercice 4 :** Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$  et  $u_n \in ]0; 1[$ .

- Étudier les extrema de la fonction  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x(1 - x)$ .
- En déduire que  $(1 - u_n)u_n \leq \frac{1}{4}$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 5 :** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a < b$  et les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_n$  la proposition  $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ .

- Montrer  $\mathcal{P}_0$ .
- Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vrai.
- Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

**Exercice 6 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_1 = \sum_{k=0}^n k$  et  $S_2 = \sum_{k=0}^n k^2$

- Montrer que  $S_1 = \sum_{l=0}^n (n - l)$ , en déduire la valeur de  $S_1$ .
- Développer  $(1 + k)^3$ .
- Calculer de deux façons  $\sum_{k=0}^n (1 + k)^3 - k^3$ , en déduire  $S_2$ .

**Exercice 7 :** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles, égales à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'il existe un entier  $K$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > K \Rightarrow u_n = v_n$$

Démontrer en revenant à la définition de limite que si la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$ , alors  $\lim v_n = l$ .

## Semaine 2 : Comparaison des suites

**Exercice 8 :** Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$u_n = n^2 - 5n \ln n + \frac{2}{\sqrt{n}}; \quad v_n = \frac{1}{n^3} - 5n^{-2}; \quad w_n = e^{-n} + \frac{1}{\ln n}; \quad x_n = \frac{\sqrt{n} + \cos n + 21}{(n+2)^3}; \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + e^{-n}$$

**Exercice 9 :** Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n; \quad v_n = \cos \frac{1}{n}; \quad w_n = \sin \frac{1}{n}; \quad x_n = \sin\left(n + \frac{1}{n}\right) - \sin n$$

**Exercice 10 :** Soient  $a, b, c$  trois réels strictement positifs, déterminer un équivalent simple de la suite  $u$  définie par

$$u_n = \frac{2n}{n+a} - \frac{n}{n+b} - \frac{n}{n+c}$$

**Exercice 11 :** Déterminer  $a, b$  des réels tels que le terme  $u_n$  soit "le plus petit possible" pour  $n$  grand, avec

$$u_n = n - \frac{a}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} - \frac{b}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

**Exercice 12 :** Soit  $u$  et  $v$  des suites réelles vérifiant :

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 1 - \frac{1}{n} - 2\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Déterminer des expressions les plus simples possibles, ayant la précision maximale des termes suivants :

$$a_n = u_n + v_n \quad | \quad b_n = u_n v_n \quad | \quad c_n = n u_n \quad | \quad d_n = u_{2n} \quad | \quad e_n = u_{n^2} \quad | \quad g_n = u_{n+n^2}$$

**Exercice 13 :** Pour chacune des lignes suivantes peut-on déduire  $Q_i$  de  $P_i$  avec :

$(P_1) : u_n = o(n^2)$	$(Q_1) : u_n = O(n^2)$	$(P_2) : u_n = O(n^2)$	$(Q_2) : u_n = o(n^2)$
$(P_3) : u_n = n^2 + o(n^2)$	$(Q_3) : u_n = o(n^2)$	$(P_4) : u_n = n^3 + o(n^2)$	$(Q_4) : u_n = o(n^2)$
$(P_5) : u_n = o(n^2 + n^3)$	$(Q_5) : u_n = o(n^2)$	$(P_6) : u_n = o(n^2 + n^3)$	$(Q_6) : u_n = o(n^3)$
$(P_7) : u_n = n^2 o(n^2)$	$(Q_7) : u_n = o(n^4)$	$(P_8) : u_n = o(n^2) + O(n^3)$	$(Q_8) : u_n = o(n^2)$
$(P_9) : u_n = \frac{1}{n} o(n^2)$	$(Q_9) : u_n = o(n^2)$	$(P_{10}) : u_n = \frac{o(n^2)}{o(n)}$	$(Q_{10}) : u_n = o(n)$
$(P_{11}) : u_n = O\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)$	$(Q_{11}) : u_n = O(n^2)$	$(P_{12}) : u_n = \frac{1}{n} + o(n^2)$	$(Q_{12}) : u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
$(P_{13}) : u_n = \frac{1+n+n^2}{2-n} o(n)$	$(Q_{13}) : u_n = O(n)$		

**Exercice 14 :** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles équivalentes, montrer que si  $(v_n)$  est strictement positive à partir d'un certain rang il en est de même pour  $(u_n)$ .

**Exercice 15 :** Soit  $u_n = \sqrt{n}$  et  $v_n = \sqrt{n} + (-1)^n$

a) Montrer que  $u_n \sim v_n$ .

b) Etudier la monotonie des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 16 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$\begin{array}{l} a_n = n^2 - 5n^3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \\ b_n = \frac{1}{n} + 5n^2 + n^3 \ln n \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} c_n = \frac{1}{n} + 5n^2 + \frac{n^3}{\ln n} \\ d_n = \frac{\sqrt{n+3n-\cos n}}{(n+5)^2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} e_n = (-1)^n n + \sqrt{n} \\ f_n = \frac{7e^n + n^n - 5 \ln n}{(1+\frac{1}{n})^8} \end{array} \right.$$

### Semaine 3 : Séries numériques, sommes partielles, télescopie

**Exercice 17 :** Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k}; \quad S_2 = \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k}{k}; \quad S_3 = \sum_{k=2}^3 \frac{1}{(k-1)^2}; \quad S_4 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}; \quad S_5 = \sum_{k=1}^{100} 2^k; \quad S_6 = \sum_{k=0}^{100} 2;$$

**Exercice 18 :** Calculer les sommes partielles des séries suivantes, étudier leur convergence et calculer leur somme lorsqu'elles convergent (Pour le  $a$  on pourra utiliser une décomposition en éléments simples). :

$$a : \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k+1)}; \quad b : \sum_{k \geq 0} \ln \left( \frac{k+1}{k} \right); \quad c : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}; \quad d : \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{t=k}^{2k} \frac{1}{2^t} \right);$$

**Exercice 19 :** On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}$ .

- a) Montrer que :  $3S_n = S_n - \frac{n}{3^n} + \sum_{t=1}^n \frac{1}{3^{t-1}}$ .
- b) En déduire  $S_n$ .
- c) En déduire que la série  $\sum \frac{k}{3^k}$  converge et calculer sa somme.
- d) En déduire la convergence et la somme de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1 + \sqrt{k+1} - 3\sqrt{k}}{3^{k+1}}$ ;

**Exercice 20 :** Soit  $\sum u_n$  une série convergente :

- a) Montrer que la série de terme générale  $(1 + u_n)$  est divergente.
- b) Soit  $\sum v_n$  une série divergente, montrer que la série de terme général  $u_n + v_n$  est divergente.
- c) Donner un exemple de deux séries divergentes  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  telles que la série de terme général  $u_n + v_n$ , soit convergente.

**Exercice 21 :** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée.

- a) Montrer que la série de terme générale  $(-1)^n \int_0^1 t^n f(t) dt$  est convergente.
- b) Montrer que la somme de cette série vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n f(t) dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$$

#### Semaine 4 : Convergence des séries à termes positifs

**Exercice 22 :** Étudier la convergence des séries suivantes :

- |   |                                     |   |   |
|---|-------------------------------------|---|---|
| a) $\sum \frac{n}{n^3 + 3n}$                | f) $\sum \sin n$                    | k) $\sum \cos \frac{1}{n^2}$                  | o) $\sum \sin \left( \frac{1}{n} \right)$               |
| b) $\sum \frac{n^7 - 6n^2 - 21}{n^8 + 31n}$ | g) $\sum \frac{\ln n}{n^3}$         | l) $\sum \frac{1 + n^2}{n^3(n + \ln n)}$      | p) $\sum \frac{1}{n} - \sin \left( \frac{1}{n} \right)$ |
| c) $\sum \frac{n^7}{2n - 3n^9}$             | h) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3n}$ | m) $\sum \left( \frac{1}{2} \right)^{\ln n}$  | q) $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$                    |
| d) $\sum \frac{n}{n^2 + \cos n}$            | i) $\sum \frac{1}{(2n+3)(n+7)}$     | n) $\sum \frac{n^2 - 7n + 3}{n^5 - 6n^2 - 1}$ | r) $\frac{n^2 + n \cos n}{n + 192}$                     |
| e) $\sum \sin \frac{1}{n^2}$                | j) $\sum \frac{3 + (-1)^n}{n}$      |   |   |

**Exercice 23 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Étudier la convergence des séries suivantes :

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| a) $\sum \frac{n^5 - 6n^2 - 21}{n^8 + 31n}$ | d) $\sum e^{\frac{1}{n}}$               | g) $\sum \ln \left( \frac{n^2}{n^2 + 1} \right)$ | i) $\sum \frac{7+3(-1)^n}{\sqrt{n}}$        |
| b) $\sum \frac{1}{n^3 + n \cos n}$          | e) $\sum \frac{2+3\sqrt{n}}{n+3n^2}$    | h) $\sum \frac{n+5(-1)^n}{n^3}$                  | j) $\sum \frac{n^3 + 3n \sin n}{n^4 + 192}$ |
| c) $\sum \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)$  | f) $\sum \frac{n^3 + n^2 + 2}{5 + n^2}$ |  |   |

**Exercice 24 :** En utilisant des développements limités, étudier la convergence des séries suivantes :

- a)  $\sum e^{\frac{1}{n}} - \frac{1+n}{n}$       b)  $\sum \cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n}$       c)  $\sum \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) - 2\sqrt{\frac{1}{n}}$

**Exercice 25 :** Représenter dans le plan, l'ensemble des  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pour lesquels la série suivante converge :

$$\sum \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$$

**Exercice 26 :** Soit  $(a_n)$  une suite réelle, positive, on pose  $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ .

- a) Montrer que si la série  $\sum a_n$  converge alors la série  $\sum b_n$  converge.
- b) Réciproquement, montrer que si la série  $\sum b_n$  converge alors la série  $\sum a_n$  converge.

**Exercice 27 :** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs convergente, étudier la convergence des séries :

$$\sum u_n^2; \quad \sum \ln(1 + u_n); \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}; \quad \text{on pourra montrer que } \forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

**Exercice 28 :** Soient  $(u_n)$  une suite réelle décroissante de limite 0, et  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

a) Montrer que  $S_{2n} - S_n \geq nu_{2n}$ .

b) Montrer que si la série  $\sum u_n$  converge alors la suite  $(nu_n)$  tend vers 0.

c) Soient  $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ , et  $T_n = \sum_{k=1}^n v_k$ , Trouver une relation entre  $S_n$  et  $T_n$ , en déduire que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature et que lorsqu'elles convergent leurs sommes sont égales.

d) Déduire de la question précédente la somme de la série  $\sum \frac{n}{2^{n+1}}$ .

**Exercice 29 :** [dur] Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries à termes réels positifs, telles que  $a_n \sim b_n$  au voisinage de  $+\infty$ . On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \Sigma_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad \Gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

a) Calculer  $S_n, \Sigma_n, R_n, \Gamma_n$  pour  $a_n = 2^{-n}$  et  $b_n = 2^{-n} + 3^{-n}$ , comparer  $S_n$  et  $\Sigma_n$  puis  $R_n$  et  $\Gamma_n$

b) Montrer que si  $\sum a_n$  converge alors  $R_n \sim \Gamma_n$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Montrer que si  $\sum a_n$  diverge alors  $S_n \sim \Sigma_n$  au voisinage de  $+\infty$ .

d) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n^2)$ , montrer que  $(u_n)$  tend vers 0, déterminer  $\alpha$  tel que la suite  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$  ait une limite finie non nulle. A l'aide d'un télescopage déterminer un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 30 :** [dur] Soit  $\alpha > 1$ , on veut déterminer la vitesse de convergence de la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .

a) Tracer la fonction définie par  $f(t) = t^{-\alpha}$  sur l'intervalle  $[n; n+1]$ , déterminer un encadrement de l'aire de la surface  $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | n < x < n+1; 0 < y < f(x)\}$ , à l'aide de l'aire de deux rectangles.

b) En déduire que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

c) En déduire un encadrement de  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

d) En déduire l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

La convergence est-elle lente, géométrique, rapide ?

e) Accélération de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . On pose  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ ;  $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

i) Déterminer un équivalent de  $R_N$ .

Montrer que la suite définie par  $u_n = S_n + \frac{1}{n}$  converge vers  $S$  plus vite que  $(S_n)$  cad  $u_n - S = o(S_n - S)$ .

ii) Calculer  $T = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ .

En étudiant la série de terme général  $\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ , déterminer une série qui converge vers  $S$  plus vite que  $(S_n)$ .

iii) On suppose que  $S_n = S + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ , on ne connaît ni  $S$ , ni  $a$ , ni  $b$ . On pose  $D_n = 2S_{2n} - S_n$ , montrer que  $(D_n)$  converge plus vite que  $S_{2n}$ , comparer le nombre de calculs élémentaires nécessaire pour calculer  $D_n$  et  $S_{2n}$ , conclusion.

Comment pourrait-on sur la même idée construire une suite  $(U_n)$  qui converge plus vite que  $(T_{2n})$ . sol :

$$(4T_{2n} - T_n)/3$$

### Semaine 5 : Comparaison à une série géométrique

**Exercice 31 :** Étudier la convergence des séries suivantes :

a)  $\sum \frac{n}{2^n}$

b)  $\sum \frac{n^4 - n^3}{2^n + 3^n}$

c)  $\sum \frac{2^n - n}{3^n}$

d)  $\sum \frac{1 + n^2}{(3^n - 2)(1 + n)}$

**Exercice 32 :** Étudier la convergence des séries suivantes :

a)  $\sum \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

c)  $\sum \frac{2^n}{n!}$

f)  $\sum \frac{n^2 + 1}{2^n + n}$

h)  $\sum \left(1 - \cos \frac{1}{2^n}\right)$

b)  $\sum \frac{n^3 - n^2 + 2}{(1 + n^2)2^n}$

d)  $\sum \frac{n!}{n^7 2^n}$

g)  $\sum \frac{n^7 e^n}{n!}$

i)  $\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

e)  $\sum \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

$$\begin{array}{llll}
 j) \frac{n!}{n^n} & l) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} & m) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} & n) \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \\
 k) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} & & & o) e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}
 \end{array}$$

**Exercice 33 :** Soient  $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$  ( $n \geq 1$ ) et  $v_n = \ln u_n$ .

- 1) Étudier la série de terme général  $\omega_n$  où  $\omega_n = v_n - v_{n-1}$  pour  $n \geq 2$  et  $\omega_1 = v_1$ .
- 2) En déduire que la suite  $(v_n)$  converge et puis la suite  $(u_n)$  converge vers  $\lambda > 0$ .
- 3) En utilisant la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi},$$

déterminer  $\lambda$ , et en déduire un équivalent de  $n!$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 34 :** [dur] Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes vers un même réel  $l$ , on dit que  $(u_n)$  converge plus vite que  $(v_n)$  si  $u_n - l = o(v_n - l)$ . Soit  $(a_n)$  une suite positive telle que  $(\sqrt[n]{a_n})$  converge vers  $l < 1$ . Montrer que la série de terme générale  $a_n$  converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à  $l$ .

**Exercice 35 :** [dur] Soit  $(a_n)$  une suite positive telle que  $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right)$  converge vers  $l < 1$ .

- a) Montrer que la série de terme générale  $a_{n+1} - a_n$  converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à  $l$ .
- b) En déduire que la suite  $(a_n)$  converge plus vite vers 0 que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à  $l$ .
- c) En déduire que la série  $\sum a_n$  converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à  $l$ .

**Exercice 36 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Comparer les vitesses de convergence des séries :  $\sum \frac{1}{2^n}$  et  $\sum \frac{1}{3^n}$ .

### Semaine 6 : Convergence absolue et compléments

**Exercice 37 :** Soient  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

- a) Montrer que la série  $\sum u_n$  converge.
- b) Déterminer un équivalent simple de  $v_{2n} + v_{2n+1}$ .
- c) En déduire que la série  $\sum v_n$  diverge.
- d) Montrer que  $u_n \sim v_n$ .
- e) Ceci montre qu'une hypothèse est indispensable dans la proposition sur les séries ayant des termes généraux équivalents, laquelle ?

**Exercice 38 :** Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$\begin{array}{lll}
 a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} & d_n = \frac{(-1)^n}{n^4 + 2n^3 - 35\pi n + 1} & f_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} - (-1)^n n^{\frac{1}{8}}} \\
 b_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) & e_n = \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}} & g_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right) \\
 c_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) & & h_n = \frac{(-1)^n}{2n - 3^n}
 \end{array}$$

**Exercice 39 :** Soit  $a$  un réel et  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ .

- a) Si  $a \leq 0$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.
- b) Si  $a > 0$ , écrire un développement asymptotique de  $u_n$  et déterminer les  $a$  pour lesquels la série  $\sum u_n$  est convergente.

### Semaine 7 : Compléments et produit de Cauchy

**Exercice 40 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$\begin{array}{l}
 a_n = \frac{1}{n(n^2 + 7)}; \quad b_n = \frac{3 - 7n}{n^2}; \quad c_n = \frac{n}{2^n}; \quad d_n = \frac{n^3}{n!}; \quad e_n = \frac{(-1)^n n + 5}{n^2}; \quad g_n = \frac{5(-1)^n}{n^5 - 4n^3 + 1} \\
 h_n = \frac{\sin n}{n(7 + \sqrt{n})}; \quad i_n = \frac{n^2 + 3n^2\sqrt{n} - 126n}{n^3 + 4n^2\sqrt{n}}; \quad j_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}} - e^{-\frac{1}{n}}; \quad k_n = \frac{n^n}{n!}; \quad l_n = \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}} + 5}{n^{\frac{1}{2}}};
 \end{array}$$

**Exercice 41 :** Soit  $a$  un réel strictement compris entre  $-1$  et  $1$ , montrer à l'aide du produit de Cauchy que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$$

**Exercice 42 :** Pour des réels  $a$  et  $b$ , montrer que la série de terme général  $\frac{a^n}{n!}$  converge puis que

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

**Exercice 43 :** Série de Bertrand : Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels, on cherche à étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

a) Si  $\alpha > 1$ , en posant  $\alpha' = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$ , et en comparant  $u_n$  et  $v_n = \frac{1}{n^{\alpha'}}$ , montrer que la série  $\sum u_n$  converge.

b) Si  $\alpha < 1$ , en posant  $\alpha' = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$ , et en comparant  $u_n$  et  $v_n = \frac{1}{n^{\alpha'}}$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.

c) Si  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ , montrer que  $\frac{1}{n \ln n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx$  en déduire que la série  $\sum u_n$  diverge.

d) Si  $\alpha = 1$  et  $\beta < 1$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.

e) Si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ , montrer que  $\frac{1}{n \ln^\beta n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x \ln^\beta x} dx$  en déduire que la série  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 44 :** Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs, convergente

a) Étudier le minimum de la fonction  $f(x) = x + \frac{1}{1+n^2x}$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) En déduire que la série  $\sum \frac{1}{1+n^2a_n}$  diverge.

**Exercice 45 :** (Critère de Raabe-Duhamel)

a) Soit  $(u_n)$  une suite à termes strictement positifs, on suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 1$  et une suite bornée  $(M_n)$  tel que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{M_n}{n^\beta}$$

On pose  $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$  et  $w_n = v_{n+1} - v_n$ , déterminer un équivalent de  $|w_n|$ , montrer que la série de terme général  $w_n$  converge, en déduire qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $u_n \sim \lambda n^{-\alpha}$ .

b) Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \dots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \quad (x \in \mathbb{R}); \quad v_n = \prod_{p=1}^n \left( 2 - e^{\frac{1}{p}} \right).$$

**Exercice 46 :** [dur] (Avec l'aide d'une calculatrice)

Considérons la série de somme partielle  $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k^2+1}$ , on pose  $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$  le reste et  $S$  la somme de la série.

1) Pour une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  montrer que

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

2) En déduire un encadrement de  $R_n$ .

3) En déduire un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|R_n| \leq 10^{-4}$ .

4) Montrer qu'il existe  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + t_n,$$

avec  $0 \leq t_n \leq n^{-4}$  pour  $n \geq 3$ .

5) Montrer que  $0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k \leq \frac{1}{3n^3}$ .

6) Calculer

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

7) Montrer à l'aide des questions précédentes que le calcul de  $S_{15}$  permet le calcul d'une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-4}$  près.

**Exercice 47 :** Étudier la nature des séries de terme général :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + x^2} dx$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n k}$$

$$c_n = \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^a}$$

$$d_n \text{ tel que } d_{n+1} = \frac{\cos d_n}{n}$$

$$e_n \text{ tel que } e_{n+1} = \frac{\sin e_n}{n}$$

### Semaine 8 : Suites et séries de fonctions

**Exercice 48 :** Étudier la convergence simple des suites de fonctions  $(f_n)$  sur l'ensemble  $I$  correspondant ( $I = \mathbb{R}$  si pas précisé).

$$a_n(x) = \frac{x}{x^2 + n}$$

$$b_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4 + x^4}$$

$$c_n(x) = \frac{nx^3 + \sqrt{nx} + 2}{1 + nx^2}$$

$$d_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}; I = [0, +\infty[$$

$$e_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right);$$

$$f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right); I = ]0, +\infty[$$

$$g_n(x) = x^n; I = [0, 1]$$

$$h_n(x) = (\sin x)^n$$

$$i_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{1 - e^{-\frac{x^2}{n}}};$$

**Exercice 49 :** Étudier la convergence simple et la convergence normale sur  $\mathbb{R}$  des séries de fonctions de terme général :

$$a_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2 + 1};$$

$$b_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n^2}\right);$$

$$c_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1 + n^2};$$

$$d_n(x) = \frac{x}{1 + n^2};$$

$$e_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^2};$$

$$f_n(x) = \frac{e^{-n}}{1 + x^2};$$

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2};$$

$$h_n(x) = \frac{1}{x^2 + n + \frac{1}{n}};$$

$$i_n(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^n;$$

**Exercice 50 :** Étudier la convergence simple et la convergence normale sur  $\mathbb{R}$  puis sur un intervalle de la forme  $[-R; R]$  de la série de fonctions :

$$\sum \frac{x}{x^2 + n^2}$$

**Exercice 51 :** Étudier les convergences simple et normale des séries de fonctions définies par leur terme général sur  $I$ .

$$a_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, I = \mathbb{R}^+$$

$$b_n(x) = \frac{x}{n^2}, I = \mathbb{R}$$

$$c_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } x \geq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, I = \mathbb{R}$$

$$d_n(x) = \frac{nx}{3n^4 + x^4}, I = \mathbb{R}$$

$$e_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, I = \mathbb{R}^+$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ si } x \geq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, I = \mathbb{R}$$

**Exercice 52 :** On considère pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Étudier la convergence simple de la série de fonctions de terme général  $f_n$ . On note  $S$  la somme de cette série.
- Montrer que  $S$  est impaire, continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer qu'il existe  $K$  tel que pour tout  $x > 1$ , on ait  $S(x) \leq \frac{K}{x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ .
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$ .
- On note  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série de terme général  $f_n$  et  $T_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série harmonique, montrer que  $|T_n - S_n(x)| \leq \frac{nx^2}{1 + x^2}$
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)/x = +\infty$ . Que peut-on en déduire pour le graphe de  $S$ ? La fonction  $S$  est-elle dérivable en 0?

### Semaine 9 : Étude de fonctions définies comme somme d'une série de fonctions

**Exercice 53 :** Soit la fonction  $f$  définie par la somme de la série  $\sum \frac{\cos(nx)}{1 + n^3}$ , étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .

**Exercice 54 :** On étudie la série de fonction  $\sum ne^{-nx}$ .

- Sur quel domaine maximum  $D$  de  $\mathbb{R}$  la série converge-t-elle simplement, on note alors  $S$  sa somme.
- Étudier la convergence normale de la série sur des intervalles de la forme  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ .
- En justifiant, avec précision, une intégration terme à terme, déterminer une primitive de  $S$ .
- Calculer  $S$  sur  $]0; +\infty[$ .



**Exercice 55 :** Pour  $n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{x}{n(1+xn^2)}$ .

- Étudier la convergence simple de la série de fonction  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on note  $S$  la somme de la série de fonctions.
- Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Étudier la convergence normale de la série  $\sum f'_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Montrer que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- Pour  $n$  fixé, déterminer un équivalent simple lorsque  $x$  tend vers 0 de  $\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}$ .
- En revenant à la définition de la dérivée en 0, montrer que  $S$  n'est pas dérivable à droite en 0.

**Exercice 56 :** Déterminer l'ensemble  $I \subset \mathbb{R}$  le plus grand possible tel que la série de fonctions de terme général

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$  converge simplement sur  $I$ . On note  $S$  sa somme.

- Étudier la convergence normale de cette série de fonction.
- Montrer que  $S$  est continue sur  $I$ .
- Étudier la convergence uniforme de la série de fonction  $\sum f'_n$  sur  $I$  puis sur tout intervalle de la forme  $[a; +\infty[$ , avec  $a > 0$ .
- Montrer que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- Montrer que  $S$  n'est pas dérivable à droite en 0.

**Exercice 57 :** Soit  $(a_n)$  une suite numérique décroissante positive. Soit  $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$ .

- Montrer que la suite des fonctions  $(u_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .
- Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .
- Montrer que la série converge normalement sur  $[0, 1]$  ssi  $\sum_{k \geq 1} a_k/k$  converge.

**Exercice 58 :** (Fonction  $\zeta$  de Riemann) : On note, pour  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

- Montrer que pour  $k > 1$  entier et  $x \in ]1, +\infty[$ , on a  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt$ .
- En encadrant les sommes partielles de la série, montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ .
- Montrer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1, +\infty[$ .
- Montrer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]1, +\infty[$ , puis que  $\zeta$  est convexe.
- Donner l'aspect de la courbe représentative de  $\zeta$ .
- Pour  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ , montrer que  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $T(x) + \zeta(x) = 2^{1-x} \zeta(x)$ ,

**Exercice 59 :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [0, 1]$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $|f(x)| \leq M|x|$  où  $M$  est une constante. On définit, pour tout  $n \neq 0$ ,  $f_n(x) = f(2^{-n}x)$ . Montrer que la somme de la série  $\sum f_n$  est continue sur  $I$ .

### Semaine 10 : Séries entières

**Exercice 60 :** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- |                      |                                  |                                     |  |
|----------------------|----------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) $\sum 2^n x^n$   | (e) $\sum \frac{1}{n!} x^n$      | (i) $\sum \cos n x^n$               | (m) $\sum \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} x^n$ |
| (b) $\sum n^n x^n$   | (f) $\sum \frac{n^2-1}{n+1} x^n$ | (j) $\sum \frac{x^{2n}}{2-\sin(n)}$ | (n) $\sum \frac{(2n)! x^n}{(n!) n^n}$                  |
| (c) $\sum n x^n$     | (g) $\sum n^5 x^n$               | (k) $\sum \frac{n^2+n}{2^n+n!} x^n$ | (o) $\sum (1-\frac{1}{n})^{n^2} x^n$                   |
| (d) $\sum \ln n x^n$ | (h) $\sum 2^n x^{2n}$            | (l) $\sum z^{n^2}$                  | (p) $\sum x^{n!}$                                      |

**Exercice 61 :** Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières suivantes :

- |                                       |   |                             |                                |  |
|---------------------------------------|---|-----------------------------|--------------------------------|--|
| (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n$ | (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n} x^n$ | (c) $\sum_{n \geq 0} n x^n$ | (d) $\sum_{n \geq 0} n x^{2n}$ | (e) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$ |
|---------------------------------------|---|-----------------------------|--------------------------------|--|

**Exercice 62 :** Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière suivante  $\sum a_n x^n$  avec :

$$a_{2n} = 3^n \text{ et } a_{2n+1} = 2^n$$

**Exercice 63 :** Soient  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $b$  un réel strictement positif.

- a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n^2 x^n$  est  $R^2$ .
- b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^{2n}$  est  $\sqrt{R}$ .
- c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum b^n a_n x^n$  est  $\frac{R}{b}$ .
- d) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^d a_n x^n$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ), est  $R$ .
- e) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$ , est infini.

**Exercice 64 :** A l'aide d'une série entière, calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n}$$

**Exercice 65 :** On considère les trois séries entières suivantes  $\sum x^n$ ,  $\sum x^n/n$  et  $\sum x^n/n^2$ , préciser le comportement de chaque série aux extrémités de son intervalle de convergence (c'est à dire en  $R$  et en  $-R$ , où  $R$  est le rayon de convergence de la série entière.)

**Exercice 66 :** Soient  $d \in \mathbb{N}$  et  $\sum a_n x^n$  une série entière, montrer que les séries entières

$$\sum a_n x^n \text{ et } \sum a_{n+d} x^n$$

ont même rayon de convergence.

**Exercice 67 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer le rayon de convergence et trouver la somme des séries entières

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} & c) \sum_{n \geq 0} (n+2)x^n & e) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n^2} x^n & g) \sum_{n \geq 0} \frac{(\ln n) x^n}{(n+1)(2n+1)} \\ b) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+2^n)} & d) \sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{3^n} x^{2n} & f) \sum_{n \geq 1} \frac{1+a^n}{n} x^{2n} \ (a \in \mathbb{R}^+) & h) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n \ (\theta \in \mathbb{R}). \end{array}$$

**Exercice 68 :** Soit  $f(x)$  la somme de la série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$ , où

$$a_n = \int_0^1 \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$$

- a) Déterminer les bornes de la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$ .
- b) Montrer que  $R \geq 2$ .
- c) Étudier la convergence normale sur  $[0; 1]$  de la série de fonctions :  $\sum \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^n$ .
- d) Écrire la fonction  $f$  comme une intégrale.

**Exercice 69 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières  $\sum 2^n x^{3n}$  et  $\sum \frac{2n}{(n!)^2} x^n$ .

**Exercice 70 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$(a) \sum_n \frac{n^2}{3^n + n} x^n \quad (b) \sum_n 5^n x^{2n+1} \quad (c) \sum_n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n x^{2n}$$

## Semaine 12 : Développement en séries entières

**Exercice 71 :** Déterminer des séries entières dont la somme est égale aux fonctions suivantes sur leur intervalle de convergence :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_3(x) = \ln(1+x)$$

$$f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$f_7(x) = \operatorname{ch} x$$

$$f_2(x) = e^{2x}$$

$$f_4(x) = \operatorname{Arctan} x$$

$$f_6(x) = \frac{x}{1+2x}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{1-x} e^x$$

**Exercice 72 :** Montrer que  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{tx+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+x} dt$ . On pourra utiliser un développement en série entière de la série géométrique.

**Exercice 73 :**

- a) Rappeler le développement en série entière de  $\ln(1+x)$ .
- b) Soit  $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  une solution sur  $] -1; 1[$  de l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(x+1)$$

Montrer que  $a_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}$ .

- c) Montrer que la somme de la série entière  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)} x^n$  est bien solution de  $E$  sur  $] -1; 1[$ .
- d) Écrire cette somme à l'aide de fonctions usuelles. sol :  $(x+1)^2/2/x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$

**Exercice 74 :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $y'' + xy = 0$  qui sont des sommes de séries entières au voisinage de 0.

**Exercice 75 :** On considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' - y' + 4x^3y = 0$ .

- a) Montrer que si la somme d'une série entière est solution de  $(E)$ , son terme général vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}(n+2)(n+4)a_{n+4} = -4a_n$$

et que  $a_1 = a_3 = 0$ .

- b) Montrer que les termes  $a_{2k+1}$  d'indice impaire sont tous nuls.
- c) Montrer que la série entière trouvée a un rayon de convergence infini et qu'elle est bien solution de  $(E)$ .
- d) Écrire les solutions de  $(E)$  développable en séries entières à l'aide de fonctions usuelles. sol :  $k_1 \cos x^2 + k_2 \sin x^2$

**Exercice 76 :** Soit  $f(x)$  la somme de la série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$  où  $(a_n)$  est la suite de Fibonacci, définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Montrer que  $a_n \leq 3^n$ .
- b) En déduire que  $R > 0$ .
- c) Montrer que  $\forall x \in ] -R; R[$ ;  $f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)$ .
- d) Calculer  $f(x)$  pour  $x \in ] -R; R[$ , en déduire  $a_n$  et  $R$ .

**Exercice 77 :** Soit  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon strictement positif. Montrer que si  $S$  est une fonction paire alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n+1} = 0$ .

Déterminer les séries entières dont la somme  $S$  est une fonction paire, solution au voisinage de 0 de l'équation différentielle  $y'' + xy' + 2y = 0$ .

**Exercice 78 :** Pour chacune des fonctions  $f_i$  suivante, déterminer l'ensemble de définition de  $f_i$ , le développement en série entière en 0, le rayon de convergence de ce DSE, les  $x$  pour lesquels il y a égalité entre  $f_i(x)$  et son DSE.

$$f_1(x) = x^3 e^x, f_2(x) = \frac{1}{1-x^2}, f_3(x) = \ln(1+x), f_4(x) = \arctan x$$

**Exercice 79 :** On rappelle le théorème de Cauchy linéaire pour les équations différentielles du premier ordre : Soient  $a$  et  $b$  des fonctions continues d'un intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $t_0$  un élément de  $I$  et  $y_0$  un réel, l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)$$

possède une unique solution définie sur  $I$  qui vérifie  $y(t_0) = y_0$ .

- a) Montrer que la fonction définie par  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ) est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- b) Montrer que cette équation différentielle possède une unique solution développable en série entière vérifiant  $S(0) = 1$ . Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- c) En déduire le développement en série entière de  $f$ .

**Exercice 80 :** Montrer que l'équation différentielle  $xy'' + y' + y = 0$  d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0. On précisera le rayon de la série entière trouvée.

**Exercice 81 :** Soit la fonction définie sur  $J = ]0; 1[$  par

$$g(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

- a) Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en 0.
- b) Calculer  $g'(x)$ , puis déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par  $g$  sur  $J$ .

c) En admettant que  $g$  est développable en série entière déterminer son développement en série entière en 0.

**Exercice 82 :** Donner le développement en série entière en 0 des fonctions réelles suivantes (on précisera le rayon de convergence) :

$$1) x \rightarrow \int_x^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt.$$

$$2) x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n x) \text{ où } a \in ]-1, 1[.$$

$$3) x \rightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$4) x \rightarrow (1 + x + x^2 + x^3)^{-3}.$$

$$5) x \rightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

**Exercice 83 :** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum a_n x^n$ . On suppose que le rayon de cette série entière est infini. De plus  $f'(0) = 0$  et  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$xy'' - y = x^2$$

a) Montrer que  $a_1 = 0$ .

b) Montrer que  $a_0 = 0$ .

c) Déterminer une relation de récurrence entre  $a_n$  et  $a_{n+1}$ , en précisant les  $n$  pour lesquels elle est valable.

d) Montrer que  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = \frac{1}{6}$ , et  $\forall n \geq 3$ ,  $a_n = \frac{2n}{(n!)^2}$ .

### Semaine 13 : Combinatoire

**Exercice 84 :** Pour tout entier  $d$ , on cherche à déterminer le nombre de couples d'entier naturel  $(a, b)$  tels que  $a + 2b = d$ , on note  $p(d)$  ce nombre.

a) Calculer  $p(2)$  et  $p(6)$ .

b) Écrire les fonctions définies par  $\frac{1}{1-t}$  et  $\frac{1}{1-t^2}$  comme somme de série entières.

c) Montrer que  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$ .

d) Décomposer la fraction rationnelle  $F(t) := \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$  en éléments simples.

e) En déduire un développement en série entière de  $F(t)$ .

f) Déterminer une formule pour  $p(d)$ .

g) Expliquer sans faire les calculs explicitement, comment on pourrait déterminer le nombre de triplet d'entier naturel  $(a, b, c)$  tels que  $a + 2b + 3c = d$

**Exercice 85 :** Notons  $\llbracket 1; n \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$ ,  $S_n$  l'ensemble des bijections de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  et  $D_n$  l'ensemble des dérangements de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , c'est à dire les bijections de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sans points fixes ( $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket; f(i) \neq i$ ).

a) Déterminer le cardinal de  $S_n$ , on note  $d_n$  le cardinal de  $D_n$ , et on pose  $d_0 = 1$ .

b) Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} d_k = n!$ . En déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ .

c) Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k!} d_k \leq 1$ .

d) Soit la série entière de somme  $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} d_k x^k$ , montrer que son rayon de convergence  $R$  est supérieur à 1.

e) Montrer que  $\forall x \in ]-1; 1[$ ,  $f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$ .

f) En déduire que  $d_n = \sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^p \frac{n!}{p!}$ . Calculer  $d_5$ .

**Exercice 86 :** On note  $C_n$ , le nombre de parenthésages possible d'un produit de  $n$  termes, il est connu sous le nom de  $n$ -ième nombre de Catalan. On pose  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = C_2 = 1$ .

a) Montrer que  $C_3 = 2$  et  $C_4 = 5$ .

b) Montrer que :  $\forall n \geq 2$ ,  $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k}$ .

c) On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum C_k x^k$ , on note  $S$  sa somme.

d) Montrer que  $S(x)^2 - S(x) + x = 0$ , sur l'intervalle de convergence. Pour  $x$  fixé dans l'intervalle de convergence, en résolvant l'équation précédente calculer  $S(x)$ .

e) On pose  $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x})$ , montrer que  $f$  est DSE sur le disque  $|x| < \frac{1}{4}$ , puis que son développement en série entière  $\sum a_n x^n$ , sur ce disque vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .

- f) Montrer que  $\forall n \geq 2, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}$ .  
 g) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .

**Exercice 87 : [dur]** On note  $a_n$  le nombre de  $n$ -uplet d'entiers  $(k_1; k_2; \dots; k_n)$  valant 0; 1 ou 2 tels que  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$ . On pose  $a_0 = 1$ .

- a) Calculer  $a_1; a_2$  et  $a_3$ .  
 b) Montrer que  $a_n$  est le coefficient de  $X^n$  dans le polynôme  $P(X) = (1 + X + X^2)^n$ .  
 c) Montrer que  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-int} dt$ .  
 d) En déduire que  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos t)^n dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos t)^n dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos t)^n dt$ .  
 e) Pour  $|x| < \frac{1}{3}$ , on pose :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Montrer que  $A(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1-x(1+2 \cos t)} dt$ .

- f) On rappelle que  $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$ ; en posant  $u = \tan \frac{t}{2}$ , montrer que  $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$  puis que  $\forall x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ ,  $A(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$ .  
 g) En déduire que :  $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{1+3x}{(1-3x)(1+x)}$ .  
 h) Montrer que  $\forall x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ ,  $(1-3x)(1+x)A'(x) = (1+3x)A(x)$ .  
 i) Montrer que  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n + \frac{3n}{n+1} a_{n-1}$ .

## Exercices corrigés

### Solutions des exercices corrigés

**Solution de l'exercice 1 :**  $l_1 = \frac{7}{6}; l_2 = \frac{2}{3}; l_3 = +\infty; l_4 = +\infty; l_5 = +\infty; l_6 = 2; l_7 = +\infty; l_8 = 3; l_9 = 5; l_{10} = -15;$   
 $l_{11} = -\frac{5}{2}; l_{12} = 2; l_{13} = 0; l_{14} = 0; l_{15} = \frac{8}{3}; l_{16} = \frac{3}{5}; l_{17} = 0; l_{18} = 0; l_{19} = 4; l_{20} = +\infty; l_{21} = \frac{1}{2}; l_{22} = 6; l_{23} = \frac{1}{4}; l_{24} = \frac{1}{2};$   
 $l_{25} = \frac{1}{3}; l_{26} = \frac{3}{2}; l_{27} = e; l_{28} = 1; l_{29} = 7; l_{30} = \frac{7}{6}; l_{31} = 5; l_{32} = 2; l_{33} = 0; l_{34} = -\infty; l_{35} = \frac{4}{5};$

**Solution de l'exercice 2 :**  $f_1(x) = 1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x); f_2(x) = 1+2x+2x^2+x^2\varepsilon(x); f_3(x) = 1+3x+\frac{9}{2}x^2+x^2\varepsilon(x);$   
 $f_4(x) = 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+x^3\varepsilon(x); f_5(x) = 1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{4}x^2+x^2\varepsilon(x); f_6(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+x^3\varepsilon(x);$

**Solution de l'exercice 16 :**  $a_n \sim -5n^3; b_n \sim n^3 \ln n; c_n \sim \frac{n^3}{\ln n}; d_n \sim \frac{3}{n}; e_n \sim (-1)^n n; f_n \sim n^n;$

**Solution de l'exercice 23 :** a)  $u_n \sim n^{-3}; \sum u_n$  converge; b)  $u_n \sim n^{-3}; \sum u_n$  converge; c)  $u_n \sim n^{-1}; \sum u_n$  diverge;  
 d)  $u_n \sim 1; \sum u_n$  diverge; e)  $u_n \sim n^{-3/2}; \sum u_n$  converge; f)  $u_n \sim n^{-1}; \sum u_n$  diverge; g)  $u_n \sim -n^{-2}; \sum u_n$  converge;  
 h)  $u_n \sim n^{-2}; \sum u_n$  converge; i)  $u_n \geq \frac{4}{\sqrt{n}}; \sum u_n$  diverge; j)  $u_n \geq \frac{n^3-3n}{n^4+192} \sim n^{-1}; \sum u_n$  diverge;

**Solution de l'exercice 36 :** Attention à ne pas confondre la suite  $(\frac{1}{2^n})$  et la série  $\sum \frac{1}{2^n}$ , pour étudier la vitesse de convergence de la série il faut commencer par calculer le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ , pour cela on peut commencer par regarder  $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{2^k}$  puis faire tendre  $N$  vers l'infini, or  $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{2^k} = (\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{N+1}}) / \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$  d'où  $R_n = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$ . De même pour la série  $\sum \frac{1}{3^n}$  le reste  $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ . Finalement  $\frac{T_n}{R_n} = \frac{2^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} (\frac{2}{3})^n$  qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Finalement la série  $\sum \frac{1}{3^n}$  converge plus vite que la série  $\sum \frac{1}{2^n}$ .

**Solution de l'exercice 40 :** Le terme général  $a_n$  est positif, il est majoré par  $\frac{1}{n^3}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc  $\sum a_n$  converge.

Le terme général  $b_n$  est négatif dès le rang 2, son opposé  $-b_n$  est donc positif dès le rang 2, or  $-b_n \sim \frac{7}{n}$  qui est positif et le terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série  $\sum -b_n$  diverge donc la série  $\sum b_n$  diverge.

Une application du critère de D'Alembert montre la convergence des séries  $\sum c_n$  et  $\sum d_n$ .

$e_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{5}{n^2}$  or  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est une série alternée convergente et  $\sum \frac{5}{n^2}$  est une somme de Riemann convergente.

$|g_n| \leq \frac{5}{|n^5-4n^3+1|} \sim \frac{5}{n^5}$ , donc  $\sum g_n$  converge.

$|h_n| \leq \frac{1}{|n^{(3/2)}|}$ , donc  $\sum |h_n|$  converge. Donc  $\sum h_n$  converge.  $i_n \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$  donc la série est divergente. Pour la série  $\sum j_n$  on peut utiliser les développements limités usuels en 0 de  $\sqrt{1+x}$  et  $e^x$ , ce qui permet de montrer que  $j_n = \mathbf{O}(\frac{1}{n^2})$  la série  $\sum j_n$  est donc convergente.

on voit facilement en écrivant le numérateur et le dénominateur que  $k_n \geq 1$ , la série  $\sum k_n$  est divergente.  $l_n = \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{n^{\frac{1}{2}}}$  La première partie est le terme général d'une série alternée convergente  $(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}})$ , alors que le second est le terme général d'une série divergente. La série  $\sum l_n$  diverge.

**Solution de l'exercice 67 :**  $R_a = 1 R_b = 2 R_c = 1 R_d = \sqrt{3} R_e = \frac{1}{2} R_f = \min(1, a^{-0,5}) R_g = 1 R_h = +\infty$

**Solution de l'exercice 69 :** La première série est une série géométrique de raison  $2x^3$  elle converge si et seulement si  $|2x^3| < 1$  ce qui équivaut à  $x \in ]-2^{-1/3}; 2^{-1/3}[$ , Donc  $R = 2^{-1/3}$ . On peut aussi utiliser D'Alembert ou Cauchy.

$$u_n = \frac{2n}{(n!)^2} x^n. \text{ Regardons } \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2(n+1)}{((n+1)!)^2} |x|^{n+1} \frac{(n!)^2}{|x|^n} 2n = \frac{(n+1)}{n} \frac{|x|}{(n+1)^2}$$

Donc  $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0$ , la série de terme général  $u_n$  converge toujours, donc le rayon de convergence est infini.

Solution de l'exercice 70 : Pour (a) Commençons par regarder un équivalent  $\frac{n^2}{3^{n+n}} x^n \sim \frac{n^2}{3^n} x^n$  puis utilisons le critère de D'Alembert

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} x^{n+1} \frac{3^n}{n^2 x^n} \right| = \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{|x|}{3}$$

or cette suite tend vers  $\frac{|x|}{3}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $|x| < 3$  la série est donc convergente, pour  $|x| > 3$  la série est divergente, le rayon de convergence est donc  $R = 3$ .

Pour (b) utilisons le critère de D'Alembert

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{5^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{5^n x^{2n+1}} \right| = 5|x|^2$$

or cette suite tend vers  $5|x|^2$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$  la série est donc convergente, pour  $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$  la série est divergente, le rayon de convergence est donc  $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . On peut remarquer que la série de départ est une série géométrique un petit peu camouflée.

Pour (c) Utilisons cette fois le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left| \left( 2 - \frac{1}{n} \right)^n x^{2n} \right|} = \left( 2 - \frac{1}{n} \right) |x|^2$$

or cette suite tend vers  $2|x|^2$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  la série est donc convergente, pour  $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$  la série est divergente, le rayon de convergence est donc  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Solution de l'exercice 83 :** 1. Une formule du cours nous dit que pour un rayon de convergence non nul,  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ . D'où  $a_1 = f'(0) = 0$ . On peut aussi remarquer que  $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n 0^{n-1}$ , tous les termes sont nuls sauf pour  $n = 1$  d'où  $a_1 = 0$ .

2. Dans l'équation différentielle qui est valable pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , si l'on prend  $x = 0$  on obtient  $0 f''(0) - f(0) = 0$  d'où  $f(0) = 0$  d'où  $a_0 = 0$ .

$$3. x f''(x) - f(x) - x^2 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2$$

$$x f''(x) - f(x) - x^2 = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) n a_{n+1} - a_n) x^n - x^2$$

Comme  $f$  est solution on a pour tout  $n > 2$ ,  $(n+1) n a_{n+1} - a_n = 0$  pour  $n = 2$ ,  $(n+1) n a_{n+1} - a_n = 1$ , pour  $n = 1$ ,  $(n+1) n a_{n+1} - a_n = 0$ , et  $a_0 = 0$ .

4. Ce qui nous donne  $a_2$  et  $a_3$ , puis une récurrence nous permet de trouver la formule générale de  $a_n$ .