# Mathématiques pour l'ingénieur
# L3 & ing1, semestre 1

## Champs scalaires

**Exercice 1 :** Calculer les dérivées partielles des champs scalaires $\varphi$ et $\psi$ définis par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*, \varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad \psi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Exercice 2 :** soit $\varphi$ le champ scalaire défini par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right), \varphi(x,y) = x^2 + xy^2$$

1. Calculer les dérivées partielles de $\varphi$.
2. En déduire les dérivées partielles de $\varphi$ en $(1,2)$.
3. Écrire un $\mathrm{DL}_1$ de $\varphi$ en $(1,2)$.
4. Écrire la différentielle de $\varphi$ en $(1,2)$.
5. Comparer la valeur de $\varphi(1,1;1,9)$ et la valeur approchée en utilisant la partie principale du DL précédent.

**Exercice 3 :** Déterminer les différentielles de

$$\varphi(x;y) = \cos(x^2+3y) \quad \psi(x;y;z) = e^{x+\sin(yz)}$$

En déduire des $\mathrm{DL}_1$ de $\varphi$ en $(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0)$ et de $\psi$ en $(0,\frac{\pi}{2},0)$.

**Exercice 4 :** Soit $\varphi$ le champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = x^2+y^2-4$.
(a) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes de niveaux
$L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = 0\}$ et $L_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = 5\}$.
(b) Représenter dans l'espace muni d'un repère orthonormé le graphe de $\varphi$,

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = \varphi(x,y)\}$$

(c) En écrivant un $\mathrm{DL}_1$ de $\varphi$ en $(1;2)$, déterminer le plan tangent à $\Gamma$ en $(1;2;1)$.

**Exercice 5 :** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\varphi(x,y) = f(x^2+y^2)$. Montrer que, pour tout $x$, tout $y$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

**Exercice 6 :** Des notations casse pieds, soit $\varphi(x,y) = x^2 + \dfrac{x}{y^2}$, déterminer :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(3,2); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,x); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,y)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x); \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,x); \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x,x); \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,x); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,x)\right)$$

**Exercice 7 :** Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire, et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \varphi(t^2, t + \cos t)$. Calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de $\varphi$.

**Exercice 8 : [dur]** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $\varphi$ est homogène de degré $\alpha$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$, tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(tx, ty) = t^\alpha \varphi(x, y).$$

1. Montrer que le champ scalaire $\psi$ défini par $\psi(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, est homogène, on déterminera son degré.
2. Montrer qu'un champ scalaire homogène de degré $\alpha \neq 0$ a des dérivées partielles homogènes de degré $\alpha - 1$.
3. Soit $\varphi$ un champ scalaire homogène de degré $\alpha$ et de classe $C^1$. Montrer que

$$(*) \qquad x\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \alpha\varphi(x, y).$$

4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire vérifiant $(*)$. En étudiant $g(t) = t^{-\alpha}\varphi(tx, ty)$, montrer que $\varphi$ est homogène de degré $\alpha$.

# Champs de vecteurs

**Exercice 9 :** Représenter les champs de vecteurs $\Phi(x, y) = (x-y, x+y)$, puis $\Psi(x, y) = (x^2, y^2)$.

# Courbes et surfaces

**Exercice 10 :** Soient $\varphi(x, y) = 3x^2(y + 2) - \ln(5x + 2y)$, et $M = (1; -2)$.
1) Montrer que $M \in \ker \varphi$.
2) Déterminer la tangente à $\ker \varphi$ en $M$.

**Exercice 11 :** Soit $\Gamma$ la courbe du plan d'équation $x^4 + y^4 = 1$, déterminer deux points de cette courbe. Déterminer une paramétrisation pour une partie de $\Gamma$. Même question avec $\Delta$ la courbe d'équation $x^4 - 2x^2 + y^2 = 0$.

**Exercice 12 :** Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée par :

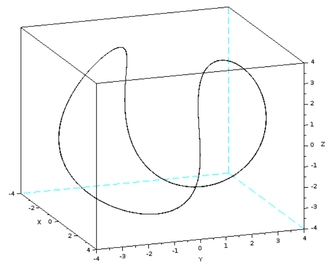
$$F(t) = (\sin 2t; \cos t)$$

1. Montrer que $F$ est $2\pi$ périodique, comment peut-on limiter le domaine d'étude de $F$ ?
2. Comparer les coordonnées de $F(-t)$ avec celles de $F(t)$. En déduire une transformation du plan qui transforme $F(-t)$ en $F(t)$. En déduire que pour étudier $\Gamma$, il suffit d'étudier $F(t)$ pour $t \in [0; \pi]$.
3. Étudier les fonctions $\sin 2t$ et $\cos t$ sur $[0; \pi]$, étudier les tangentes en $F(0)$, $F(\frac{\pi}{4})$, $F(\frac{\pi}{2})$, $F(\frac{3\pi}{4})$, et $F(\pi)$.
4. Représenter la courbe de Lissajou $\Gamma$.

**Exercice 13 :** Soit $\Gamma$ la cycloïde paramétrée par $F(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t)$.

1. Comparer les coordonnées de $F(t)$ et $F(t+2\pi)$, par quelle transformation du plan passe-t-on de $F(t)$ à $F(t+2\pi)$ ?
2. Étudier les variations des coordonnées de $F$.
3. Étudier la limite en 0 de $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$.
4. Représenter $\Gamma$.

**Exercice 14 :** Sur la couture d'une balle de Tennis.
Soient $F(t) = (3\cos t + \cos 3t; 3\sin t - \sin 3t; 2\sqrt{3}\sin 2t)$ ;
et $\Gamma$ la courbe paramétrée par $\varphi$.
1) Montrer que $\Gamma$ est incluse dans une sphère de centre 0.
2) Montrer que $F$ est $2\pi$-périodique.
3) Comparer les coordonnées de $F(t)$ et $F(t+\pi)$,
par quelle transformation de l'espace passe-t-on de $F(t)$ à $F(t+\pi)$ ?
3) Déterminer les intersections de $\Gamma$ avec l'équateur d'équation $z=0$.
4) En chacun des points précédemment trouvés déterminer la tangente à $\Gamma$.



**Exercice 15 :** $\Psi(x,y,z) = x^3 + xy - z^2 + x - 2$ et $S = \{(x,y,z)/\Psi(x,y,z)=0\} = \ker(\Psi)$.
1) Montrer que $P : (1;1;1)$ appartient à $S$.
2) Déterminer une équation du plan tangent $T$ à $S$ en $P$.
3) Déterminer un vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}$ à $S$ en $P$.
4) Déterminer un repère orthogonal de $T$.

**Exercice 16 :** $\Phi(u,v) = (u^2 - uv, u - v^2, u^2 + v - 3)$ et
$S = \mathrm{im}(\Phi) = \{\Phi(u,v)/u,v \in \mathbb{R}\} = \Phi(\mathbb{R}^2)$
1) Montrer que le point $P : (0;-1;-2)$ appartient à $S$.
2) Déterminer $T$, le plan tangent à $S$ en $P$.
3) Déterminer un vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}$ à $S$ en $P$.
4) Déterminer une équation de $T$.

**Exercice 17 :** Soient $\Phi(u,v) = \big((2+\sin v)\cos u, (2+\sin v)\sin u; \cos v\big)$ et $\Sigma = \mathrm{Im}\Phi$ la surface paramétrée par $\Phi$, pour $u$ et $v$ compris entre 0 et $2\pi$.
1) Montrer que le point $P = (3,0,0)$ appartient à $\Sigma$.
2) Déterminer le plan tangent à $\Sigma$ en $P$.
3) Montrer que l'intersection de $\Sigma$ avec l'équateur d'équation $z=0$ est la réunion de deux cercles.
4) Déterminer les points de $\Sigma$ pour lesquels le plan tangent est horizontale c'est à dire qu'il possède une équation de la forme $z = constante$.

**Exercice 18 :** Soit $F$ une fonction vectorielle de l'espace telle que la norme de $F$ soit égale à 1 à tout instant. Montrer que $F$ et $F'$ sont deux vecteurs orthogonaux. on pourra écrire la norme à l'aide d'un produit scalaire.

**Exercice 19 :** Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et $F$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que la dérivée $F'$ de $F$ soit toujours orthogonale à $\overrightarrow{u}$. On pose $f(t) = (F(t) - F(0)).\overrightarrow{u}$. Calculer $f'$ et $f(0)$. En déduire que l'image de $F$ est incluse dans un plan.

**Exercice 20 :** Déterminer
1) Un vecteur normal et un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2y - y^3 + x + 5 = 0$ en $M_0 = (1;2)$.
2) Un vecteur normal à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 - y^3 + xyz + 2 = 0$ en $M_0 = (-1;1;2)$.
3) Une base orthogonale du plan tangent $\mathcal{T}$ à la surface d'équation $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$ en $M_0 = (1;1;2)$.

**<u>Exercice 21</u> :** Soit $\varphi$ le champ scalaire défini par $\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Montrer que si $\varphi$ possède des extrema ce ne peut être qu'en trois points que l'on déterminera, en étudiant le champ au voisinage de chacun de ces points montrer que $\varphi$ possède deux maxima locaux.

**<u>Exercice 22</u> :**

1. Étudier les variations de la fonction définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit $\varphi$ le champ scalaire défini par $\varphi(x,y) = x\mathrm{e}^{-x-y^4}$. Montrer que $\varphi$ possède un unique point critique.
3. Montrer que $\varphi$ possède un unique extremum.

# Systèmes de coordonnées classiques

**<u>Exercice 23</u> : Coordonnées polaires.** Soit $\varphi$ un champ scalaire représentant une grandeur en coordonnées cartésienne et $\tilde{\varphi}$ un champ scalaire représentant la même grandeur mais en coordonnées polaires, on a donc l'égalité

$$\varphi(x,y) = \varphi(r\cos\theta; r\sin\theta) = \tilde{\varphi}(r,\theta)$$

Démontrer les relations qui lient les dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ aux dérivées partielles par rapport à $r$ et $\theta$

$$r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

en déduire les relations donnant les dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ en fonction des dérivées partielles par rapport à $r$ et $\theta$.

**<u>Exercice 24</u> : Courbes en coordonnées polaires** Soit $\Gamma$ une courbe définie par une paramétrisation en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

1. Lorsque $r(\theta) = 2$, reconnaître $\Gamma$ ?
2. Lorsque $r(\theta) = \theta$ représenter approximativement la courbe.
3. On suppose que $r(\theta) = 2r_0\cos(\theta)$, montrer que la courbe est alors le cercle de centre $(r_0, 0)$ et de rayon $r_0$.

**<u>Exercice 25</u> :** Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $r = f(\theta)$, c'est à dire que $\Gamma$ est l'ensemble des points de coordonnées polaires $(f(\theta);\theta)$.

1. Déterminer dans le cas général, un vecteur tangent à $\Gamma$ en $(f(\theta);\theta)$, on pourra utiliser les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.
2. Dans la suite $f(\theta) = 2 + 2\cos\theta$
   (a) Représenter les point correspondant à $\theta \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.
   (b) Comparer $f(\theta + 2\pi)$ et $f(-\theta)$ à $f(\theta)$, quelles conséquences géométriques ?
   (c) Déterminer les tangentes à $\Gamma$ en $\theta = 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$.
   (d) Étudier la limite lorsque $\theta$ tend vers $\pi$ de $\dfrac{y(\theta) - y(\pi)}{x(\theta) - x(\pi)}$, en déduire la tangente à $\Gamma$ en $\theta = \pi$.
   (e) Représenter la cardioïde $\Gamma$ (trajectoire d'un point fixe sur un cercle qui roule sur un second cercle de même rayon).

**Exercice 26 :** Soit $\Phi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. déterminer le $DL_1$ de $\Phi$ en $(r_0, \theta_0)$.
2. Quel est le coefficient d'accroissement des aires en $(r_0, \theta_0)$ ?
3. Représenter le rectangle $[2; 2, 1] \times [0; \frac{1}{20}\pi]$, ainsi que son image par $\Phi$ et son image par la partie affine de $\Phi$ en $(2; 0)$.

**Exercice 27 :** Déterminer les coordonnées sphériques des points suivant ayant comme coordonnées cartésiennes :

$$A : (1, 0, 0) \qquad B : (0, 1, 0) \qquad C : (1, 1, \sqrt{2}) \qquad D : (\sqrt{3}, 1, -2)$$

**Exercice 28 :** Déterminer les parties de l'espace définis par les équations sphériques :

$$S_1 : r = 2 \qquad S_2 : \theta = \frac{1}{2}\pi \qquad S_3 : \varphi = \frac{1}{2}\pi \qquad S_4 : \varphi = \frac{1}{4}\pi$$

# Opérateurs différentiels

**Exercice 29 :** Soit $\Phi(x, y, z) = (e^{-3z}; xy; \frac{x}{y+z})$, nommer les différents opérateurs différentiels suivants et calculer les.
1) Calculer $\nabla \cdot \Phi$
2) Calculer $\nabla(\Phi.\Phi)$
3) Calculer $\nabla \wedge \Phi$

**Exercice 30 :** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs constants, et $\Phi$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
1) Exprimer $\nabla \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \Phi)$ en fonction de $\nabla \wedge \Phi$.
2) Déterminer la divergence et le rotationnel de $\overrightarrow{\omega} \mapsto (\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}$.
3) A quelle condition la divergence est-elle uniformément nulle, même question pour le rotationnel.

**Exercice 31 :** Démontrer les formules :

$$\nabla.(\psi\Phi) = \psi\nabla.\Phi + \nabla\psi.\Phi \tag{1}$$
$$\nabla \wedge (\psi\Phi) = \psi\nabla \wedge \Phi + \nabla\psi \wedge \Phi \tag{2}$$
$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \tag{3}$$

**Exercice 32 :** Soit $\Phi = (x^2 + my + m^2z; x + y^2 + z; x + y - z^2)$, $m$ est un paramètre
1) Calculer $\nabla \wedge \Phi$
2) Pour quelles valeurs de $m$ existe-t-il un champ scalaire $\varphi$ tel que $\text{grad}(\varphi) = \Phi$ ?

**Exercice 33 :** $\Phi = (x + 2y + az; bx - 3y - z; 4x + cy + 2z)$
1) Déterminer $a, b, c$ pour que $\Phi$ dérive d'un champ scalaire $\varphi$
2) Déterminer $\varphi$

**Exercice 34 :** Soient $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$; $r = \|\overrightarrow{r}\|$ ; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $c$ une constante réelle et $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$.
1) Calculer la divergence et le rotationnel des champs vectoriels suivants :

$$\Phi = c\overrightarrow{r} \qquad \Psi = \frac{1}{r}\overrightarrow{r} \qquad \Gamma = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r}$$

2) Calculer : $\nabla \ln(r)$; $\Delta \ln(r)$; $\nabla \cdot r^3\overrightarrow{r}$; $\nabla(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\omega})$; $\Delta f(r)$.
3) Montrer qu'il existe $\psi$ telle que $\text{grad}(\psi) = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$.
4) Existe-t-il un champ de vecteur dont le rotationnel soit égal à $\overrightarrow{r}$ ?

**Exercice 35 :** $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2y+y^3}{x}$.

1. Représenter $\nabla\varphi(1;1)$.
2. Déterminer $\varphi$ en coordonnées polaires $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
3. Représenter $\nabla\varphi(1;1)$ à l'aide de la formule donnant le gradient en coordonnées polaires.

**Exercice 36 :** Soit $\varphi(x;y;z) = x^2 + 2y^3 - 3zx$, et $M_0 = (1;1;1)$

1. Calculer $\varphi(M_0)$.
2. Écrire un $\text{dl}_1$ de $\varphi$ en $M_0$ à l'aide du gradient, écrire le produit scalaire à l'aide d'un cosinus.
3. Déterminer un point $M$ de l'espace tel que la distance entre $M$ et $M_0$ soit inférieure à 0,1 et tel que $\varphi(M)$ soit maximale.

**Exercice 37 :** Démontrer la formule du Laplacien en coordonnée polaire :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

**Exercice 38 :** Soient $\mathcal{C}$ une courbe du plan d'équation $\varphi(x,y) = 0$ et paramétrée par la fonction vectorielle $t \mapsto F(t)$, on cherche les extrema du champ scalaire $\psi$ <u>sur la courbe $\mathcal{C}$</u>. On suppose que la restriction de $\psi$ à $\mathcal{C}$ possède un extremum en $M_0 = \varphi(t_0)$.

1. Si l'on note $f(t) = \psi(F(t))$, montrer que $f'(t_0) = 0$.
2. Montrer que le gradient de $\psi$ en $M_0$ est orthogonal à $F'(t_0)$.
3. Montrer que les gradients de $\psi$ et $\varphi$ en $M_0$ sont colinéaires.
4. Application : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$, montrer qu'elle est incluse dans un carré de coté 2 que l'on déterminera. Déterminer le maximum et le minimum du champ scalaire $\psi(x,y) = x^3 + y^3$.

# Intégrales doubles

**Exercice 39 :** Représenter chacun des domaines suivants $D_i$, puis calculer l'intégrale double :

$$I_i = \iint_{D_i} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. $D_1$ est le triangle : $(0;0), (1;0), (0;1)$.
2. $D_2$ est le triangle : $(0;1), (0;-1), (1;0)$.
3. $D_3$ est le triangle : $(1;1), (2;2), (3;5)$.
4. $D_4$ est le quart de disque défini par : $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.

**Exercice 40 :** Soit $T$ le triangle défini par $(0;0), (2;-2), (1;0)$ calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_T e^{2x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**Exercice 41 :** Montrer que :

$$\int_0^a \left( \int_0^x \varphi(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_0^a \left( \int_y^a \varphi(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

**Exercice 42 :** Soit $D$ le disque de centre $O$ et de rayon $a$, calculer $\displaystyle\iint_D x + y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Exercice 43 :** Soit $D$ le huitième de disque de centre $O$ et de rayon $a$, vérifiant $0 \le y \le x$, calculer

$$\iint_D \frac{y}{x}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**Exercice 44 :** Soit $D$ le domaine défini par les inégalités :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 \le a^2$$

Calculer $I = \iint_D x^2 + y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Exercice 45 :** Soient $D$ une plaque plane, $\sigma : D \to \mathbb{R}^+$, la densité superficielle de la plaque, $M_D$ la masse de la plaque, et $G_D = (x_G, y_G)$ centre d'inertie de $D$ on a :

$$M_D = \iint_D \sigma(x;y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_G = \frac{1}{M_D} \iint_D x\sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ y_G = \frac{1}{M_D} \iint_D y\sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$$

1. Calculer la masse et le centre d'inertie du disque de centre 0 de rayon 1, dont la densité superficielle est donnée par
$$\sigma(M) = OM$$
2. Déterminer le centre d'inertie d'un demi disque homogène ($\sigma$ constant).
3. Un secteur de disque homogène de centre $O$, $OAB$ avec $OA = OB = R$ et $\widehat{AOB} = 2\alpha$.

# Circulation d'un champ de vecteurs

**Exercice 46 :** Déterminer la circulation du champ de vecteur $\Phi(x,y) = (x^2 - y; xy)$ le long du segment $[MN]$ puis d'un demi-cercle passant par $(0;-1)$ de diamètre $[MN]$ avec $M = (-1;0), N = (1;0)$.

**Exercice 47 :** Soit $\Phi$ le champ vectoriel $\Phi(x,y) = (2xy; x^2 + y^2)$. Calculer la circulation de $\Phi$ le long :

1. Du segment d'origine $O$ et d'extrémité $P = (1;1)$.
2. De l'arc de parabole porté par $y = x^2$, de $O$ à $P$.
3. Du quart de cercle de centre (1,0) de rayon 1 de 0 à $P$.

**Exercice 48 :** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\Phi(x;y) = (x^3 - 3xy^2; 3x^2y - y^3)$, déterminer la circulation du champs $\Phi$, le long du chemin constitué du segment $[OA]$, puis de l'arc $\widehat{AB}$, inclus dans un cercle de centre $O$, enfin, le segment $[BO]$ avec $A = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ et $B = (\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi); \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi))$.

**Exercice 49 :** Soit $D$ un domaine, dont le bord orienté positivement est $\mathcal{C}^+$, montrer que l'aire de $D$ est égale à

$$\text{aire}(D) = \oint_{\mathcal{C}^+} x\ \ \mathrm{d}y = -\oint_{\mathcal{C}^+} y\ \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}^+} x\ \ \mathrm{d}y - y\ \ \mathrm{d}x$$

Soit $\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$, tel que $\rho(0) = \rho(2\pi)$, montrer que la surface entourée par la courbe paramétrée en polaire par $r = \rho(\theta)$ a une aire égale à

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(t)^2 \text{ d}t$$

Application : retrouver l'aire d'un disque, puis calculer l'aire de la surface définie par la cardioïde définie exercice 25.

**Exercice 50 :** (Suite de l'exercice 45)
Déterminer le centre d'inertie des plaques homogènes suivantes :

1. une arche de sinusoïde $0 \leq y \leq \sin x,\ x \in [0; \pi]$.
2. une arche de cycloïde délimitée par $y = 0$ et $F(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t),\ t \in [0; 2\pi]$.

**Exercice 51 :** Déterminer la circulation du vecteur position de $M = (0; 0; 0)$ à $N = (2; 2; 4)$ le long de la parabole d'équation

$$\begin{cases} x = y \\ z = x^2 \end{cases}$$

Expliquer pourquoi la même question n'aurait pas de sens si l'on remplaçait le vecteur position par le vecteur vitesse.

**Exercice 52 :** Soit $\Phi$ un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel scalaire (c'est à dire que $\Phi$ est le gradient d'un champs scalaire), et $\gamma, \delta$ des chemins $\gamma, \delta : [0; 1] \to \mathbb{R}^3$, tels que $\gamma(0) = \delta(0)$ et $\gamma(1) = \delta(1)$ montrer que $\int_\gamma \Phi \cdot \overrightarrow{dl} = \int_\delta \Phi \cdot \overrightarrow{dl}$

# Équations différentielles

**Exercice 53 : démonstration de cours à connaître**
Soit $(E)$ l'équation différentielle $ay' + by = 0$ avec $a, b$ des réels non nuls.

1. Sans utiliser le cours, déterminer l'unique $r$ tq $e^{rx}$ soit solution de $(E)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$, on pourra chercher les fonctions $h$ tels que $y(x) = h(x)e^{rx}$ soit solution de $(E)$.

**Exercice 54 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y' - 3y = 0$
$(E_2) : 2y' + y = 0; \quad y(1) = 2$
$(E_3) : 3y' + y = 5; \quad y(0) = -1$
$(E_4) : 2y' - 3y + 1 = x$

**Exercice 55 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y' + y = e^{-x}\ln x$
$(E_2) : 2y' + y = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x};$
$(E_3) : (x^2 + 1)y' + 2xy = e^{3x}; \quad y(0) = -1$
$(E_4) : y' - y\tan x = 1$

**Exercice 56 :** Résoudre les équations différentielles suivantes, pour un second membre exponentiel polynôme $T(x)e^{\alpha x}$, on cherche une solution particulière de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ :

$(E_1) : y - 2y' = x^2 + 1; \quad y(0) = 1$
$(E_2) : 2y' - 3y = x^2e^{2x};$
$(E_3) : y' - 2y = xe^{2x};$
$(E_4) : y' + 2y = \sin x$
$(E_5) : (x + 1)(x^2 + 1)y' + x^2y = 0.$

**Exercice 57 :** Soit l'équation différentielle : $xy' - 2y = 1$.

1. Chercher les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Chercher les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. En étudiant les solutions précédentes en 0, déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 58 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y" - 3y' + 2y = e^{3x}$
$(E_2) : y" - 3y' + 2y = e^{2x}$
$(E_3) : y" + 2y' + 5y = 2x - 3$
$(E_4) : y" + y = (x+1)e^x;\ \ y(0) = 0; y'(0) = 1$
$(E_5) : y" + 4y' + 4y = (x-1)e^{2x}$
$(E_6) : y" - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$
$(E_7) : y" - y = e^x$
$(E_8) : y" - y' = 1$
$(E_9) : y" + y' - 2y = e^{-x}\cos x$
$(E_{10}) : y" + 2y' + y = e^{-x}\sin 2x$

**Exercice 59 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y^{(4)} + 4y''' + 3y'' - 4y' - 4y = e^{2x}$
$(E_2) : y^{(4)} + y = x$
$(E_3) : y^{(4)} + 8y'' + 16y = e^{-x}\sin(x)$
$(E_4) : y^{(4)} - 2y^{(3)} - 3y'' + 8y' - 4y = e^x$

**Exercice 60 :** Soit $(E)$ l'équation différentielle $(x^2+1)^2 y' - 2xy^2 = 0$.

1. Déterminer la solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer la solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = 2$.
3. Comparer les intervalles de définitions des deux solutions précédentes.

**Exercice 61 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : (1+x)y' + y^2 = 0$
$(E_2) : y' = x(y+1)(y-3)$
$(E_3) : y' = y\ln(y)$
$(E_4) : (x+x^3)yy' = 1; \quad y(1) = -1$
$(E_9) : (x^3-1)y' + y^2 = 0$ avec $y(1) = 2$.
$(E_5) : y' = \frac{1+\ln x}{1+\ln y}$
$(E_6) : y'' = 8y^3$ et $y'(0) = 2y(0)^2$.
$(E_7) : y'' = -2\sin(2y)$, $y'(0) = 2$ et $y(0) = \pi$.
$(E_8) : x^2 y' = y^2 - 2x^2$.

# EDP

**Exercice 62 :** Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(E_1) : 3\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

$$(E_2) : 5\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 6\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x - 3y$$

$$(E_3) : 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^y \text{ et } \varphi(x,x) = e^x$$

$$(E_4) : \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (2x-3y)^2 \text{ et } \varphi(x,0) = 0$$

$$(E_5) : 3\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi$$

$$(E_6) : 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y\varphi$$

$$(E_7) : \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (x+y)\varphi$$

$$(E_8) : 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y\varphi^2$$

$$(E_9) : \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi = x + y \text{ et } \varphi(x,-x) = x$$

$$(E_{10}) : 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} + 2\varphi = e^x$$

**Exercice 63 :** Résoudre l'équation aux dérivées partielles $(E)$ : $2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + 3\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x$.
déterminer l'ensemble des fonctions $\varphi$ solutions de $(E)$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x,x) = 0$.

**Exercice 64 :** Résoudre les EDP suivantes en effectuant les changements de variables préconisés.

1. En posant $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = yx \end{array}\right.$, résoudre $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xy^2$.
2. En posant $\left\{\begin{array}{l} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{array}\right.$, résoudre $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2xy\varphi$.
3. En passant en coordonnées polaires résoudre $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = (x^2 + y^2)^2\varphi$.
4. En passant en coordonnées polaires résoudre $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{y^2}{x}$

**Exercice 65 :** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation aux dérivée partielle $(E)$ :

$$(E) : \ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2e^{-y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y$$

1. Déterminer une fonction de la seule variable $y$ solution de $(E)$, c'est à dire une solution de $(E)$ de la forme $\varphi(x, y) = h(y)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$, des fonctions de deux variables $\delta(x, y)$ vérifiant $\dfrac{\partial\delta}{\partial x} = 2e^{-\delta}$.
3. Montrer que la fonction $\gamma$ définie par $\gamma(x, y) = \ln(2x + y)$ appartient à $\mathcal{E}$.
4. Soit $\varphi$ une solution de $(E)$, on pose $\psi(x, y) = \varphi(x, \gamma(x, y))$, montrer que $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y) = 2\gamma(x, y)$.
5. Déduire de la question précédente la forme de la fonction $\psi$, puis résoudre $(E)$.
6. Déterminer la solution $\varphi$ de $(E)$ qui vérifie : $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \ \varphi(0, y) = y$.