



Mathématiques de l'ingénieur : Maths2 L2 - S3

Fonctions de plusieurs variables

2 juillet 2024

Alexandre MIZRAHI
CY Cergy Paris UNIVERSITÉ

Table des matières

1	Trigonométrie	4
1.1	Le cercle trigonométrique	4
1.2	Formules d'addition	5
1.3	Équation	5
1.4	Dérivation	5
1.5	Rappel sur les nombres complexes	6
1.5.1	Le BAba	6
1.5.2	Module et argument	6
1.5.3	Racines	7
2	Intégration	8
2.1	Définition	8
2.2	Propriétés élémentaires	9
2.2.1	Méthodes d'intégration	9
2.2.2	Fonctions complexes	10
2.2.3	Linéarisation	10
2.2.4	Intégrales généralisées	11
2.3	Intégration des fractions rationnelles	11
2.3.1	Introduction	11
2.3.2	Définitions	11
2.3.3	Décomposition en éléments simples	12
3	Introduction à l'étude des fonctions de plusieurs variables	13
3.1	Motivation disciplinaire	14
3.2	Cas réel	14
3.3	Fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .	14
3.4	\mathbb{R}^p et ses propriétés.	15
3.5	Représentation graphique des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .	15
4	Dérivation	16
4.1	Objectif, méthode	16
4.2	Rappel cas réel	16
4.3	Dérivées partielles	17
4.4	Intérieur	18
5	Continuité	18
5.1	Objectif, méthode	18
5.2	Rappel cas réel	18
5.3	Pour les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}	19
5.4	Continuité et composition	20
5.5	Limites	20
6	Fonctions de classe \mathcal{C}^1.	21
6.1	Objectif, méthode	21
6.2	Rappel cas réel	21
6.3	Fonction de classe \mathcal{C}^1 .	21
6.4	DL_1	21

6.5	Composition	24
6.6	Vecteur gradient, matrice jacobienne	25
7	Fonctions de classe \mathcal{C}^2.	26
7.1	Objectif, méthode	26
7.2	Rappel cas réel	26
7.3	Dérivée partielle seconde	26
7.4	DL_2	27
8	Extrema.	28
8.1	Objectif, méthode	28
8.2	Rappel cas réel	28
8.3	Formes quadratiques	28
8.4	Formes quadratiques en dimension deux	28
8.5	Matrice d'une forme quadratique	29
8.6	Application aux extrema	29
9	Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	30
9.1	Objectif, méthode	30
9.2	Continuité	30
9.3	Classe \mathcal{C}^1	31
9.4	Déformations	32

Chapitre 1

Trigonométrie

📺 vidéo 1.1: Trigonométrie.

1.1 Le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , le point M tel que

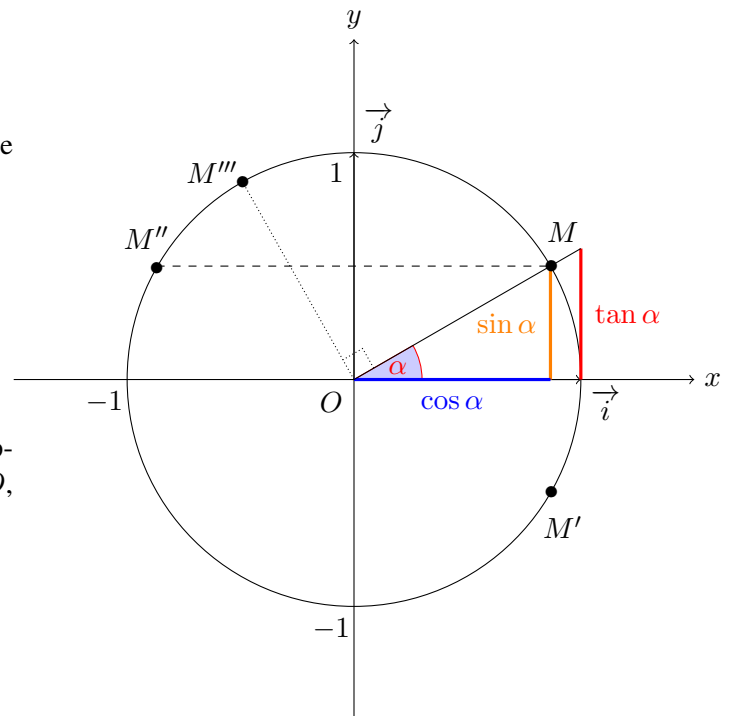
$$\begin{cases} \|\vec{OM}\| = 1 \\ (\vec{i}; \vec{OM}) = \alpha \end{cases}$$

a pour coordonnées $(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Lorsque $\cos \alpha \neq 0$ on pose $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Le point M étant à une distance 1 de O on a en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $O, (\cos \alpha, 0)$ et M :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$



Symétries et quart de tour

Si l'on considère la symétrie orthogonale (réflexion) d'axe $\mathbb{R}\vec{i}$, M' l'image de M a pour coordonnées $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , et M' a pour coordonnées $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ dans le repère $(O, \vec{i}, -\vec{j})$, on a donc les formules :

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{cases}$$

Si l'on considère la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{j}$, M'' l'image de M a pour coordonnées $(\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha))$, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , et M'' a pour coordonnées $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ dans le repère $(O, -\vec{i}, \vec{j})$, on a donc les formules :

$$\begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \end{cases}$$

Si l'on considère la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O , M''' l'image de M a pour coordonnées $(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))$, or M''' a pour coordonnées $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ dans le repère $(O, \vec{j}, -\vec{i})$, donc M''' a pour coordonnées $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$

dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'où les formules :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha \end{cases}$$

1.2 Formules d'addition

On part de deux bases orthonormales (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{u}, \vec{v})

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{v} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \vec{i} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \vec{j} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$$

$$\vec{OM} = \cos(\alpha + \beta) \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \vec{j}$$

$$\vec{OM} = \cos \beta \vec{u} + \sin \beta \vec{v}$$

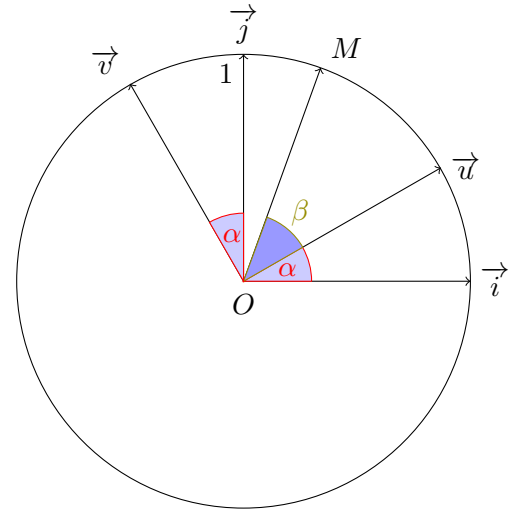
En remplaçant on obtient :

$$\vec{OM} = \cos(\beta) (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + \sin(\beta) (-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$$

$$\vec{OM} = (\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha) \vec{i} + (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) \vec{j}$$

On obtient donc les formules :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \end{cases}$$



Formules de duplication

En appliquant les formules précédentes au cas $\alpha = \beta$ on obtient :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

Sachant que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ on en déduit :

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

1.3 Équation

Les fonctions sinus et cosinus sont $2 - \pi$ périodique et l'on a :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \beta \text{ si et seulement si } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = -\beta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \sin \beta \text{ si et seulement si } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \tan \alpha = \tan \beta \text{ si et seulement si } \alpha = \beta + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1.4 Dérivation

On rappelle les formules de dérivation

$$\begin{cases} \cos'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \\ \sin'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

1.5 Rappel sur les nombres complexes

📺 vidéos 1.2: Complexes

1.5.1 Le BAba

Définition 1.1 On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C} = \{a + ib/a, b \in \mathbb{R}\}$, les opérations habituelles sur les réels restent valable, commutativité, distributivité, etc.... la particularité de i réside dans le fait que $i^2 = -1$.

Exemple 1.1

- $(2 + 3i) + (1 - 5i) = 3 - 2i$
- $5(2 - 6i) = 10 - 30i$
- $i(2 - 6i) = 2i + 6$
- $(2 + 3i)(1 - 5i) = 2 + 3i - 10i - 15i^2 = 17 - 7i$
- $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

Définition 1.2 La partie réelle est définie par $\text{Re}(a + ib) = a$, et la partie imaginaire par $\text{Im}(a + ib) = b$

exercices 5.1 Déterminer partie réelle et partie imaginaire de zz' en fonction des parties réelles et imaginaires de z et z' .

1.5.2 Module et argument

Conjugaison

Définition 1.3 $\bar{z} = \text{Re } z - i\text{Im } z$. On dit que \bar{z} est le conjugué de z .

Proposition 1.1

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
3. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
4. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.
5. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
7. $\text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
8. $\text{Im } z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Module

Définition 1.4 On définit le module d'un nombre complexe par : $|z| = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$.

Proposition 1.2 Soit z un complexe.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z|^2 = z\bar{z}$.
3. $|z| = |\bar{z}|$.
4. $|zz'| = |z||z'|$.
5. $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$.
6. $\forall z' \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
7. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$.
8. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
9. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Preuve : Pour le point 8. on a

$$\begin{aligned}
 |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\
 &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\
 &= z\bar{z} + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + z'\bar{z}' \\
 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\bar{z}') \\
 &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = (|z| + |z'|)^2
 \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Les nombre réels se représentent sur une droite, les nombres complexes se représentent dans le plan. Dans un repère orthonormal on peut représenter le complexe $a + ib$ par le point de coordonnées (a, b) , ou par le vecteur de coordonnées (a, b) . On dit que ce point ou ce vecteur a pour affixe le complexe $a + ib$. La somme de deux complexes correspond alors à la somme des deux vecteurs correspondant. La conjugaison correspond à la réflexion par rapport au premier axe. Le module correspond à la norme du vecteur.

Exponentielle complexe

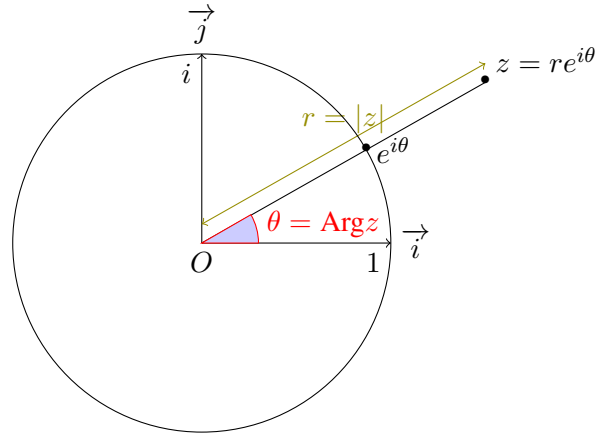
Définition 1.5 $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Proposition 1.3

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
3. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.
5. *Formule de De Moivre* : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Définition 1.6 $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+iy} = e^x e^{iy}$



avec $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg} z$

Argument

Définition 1.7 Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

l'ensemble des θ qui vérifient cette relation est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, on l'appelle argument du complexe $x + iy$. $\text{Arg} z$, désignera aussi bien, l'ensemble ainsi défini (l'argument de z), qu'une de ses valeurs (un argument de z). L'écriture précédente peut aussi s'écrire $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Remarque 1.2 Si M est le point d'affixe $a + ib$ non nul, alors l'argument de $a + ib$ est l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 1.8 a congrue à b modulo m que l'on note $a \equiv b [m]$ signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b + km$.

Proposition 1.4 1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$,

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z') [2\pi] \end{cases}$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}^*, z = |z| e^{i \text{Arg} z}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \text{Arg} \bar{z} = -\text{Arg} z [2\pi]$.
4. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') [2\pi]$.
5. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg} z [2\pi]$.
6. $\forall z' \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \text{Arg} \frac{z'}{z} = \text{Arg} z' - \text{Arg} z [2\pi]$.


1.5.3 Racines

Proposition 1.5 Tout complexe Z non nul a exactement deux racines carrés, c'est à dire deux complexes z_1 et z_2 dont le carré vaut Z .

Preuve : Si $Z = |Z| Re^{i\theta}$ alors les seuls racines carrés possibles sont $\pm \sqrt{|Z|} e^{i\frac{1}{2}\theta}$.

Proposition 1.6 Tout complexe Z non nul a exactement n racines nième, c'est à dire qu'il existe exactement n complexes z_i qui élevés à la puissance n valent Z .

Preuve : Si $Z = |Z| e^{i\theta}$ alors les seuls racines nième possibles sont $\sqrt[n]{|Z|} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n} 2ik\pi}$, pour k variant de 0 à $n - 1$, ensuite on retombe sur les mêmes valeurs.

fin de la semaine 1 

Chapitre 2

Intégration

📺 vidéo 2.1: Aire

2.1 Définition

Pour une fonction positive $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on définit l'intégrale de a à b de f comme l'aire sous la courbe de la fonction f que l'on note : $\int_a^b f(t) dt$.

pour une fonction qui n'est pas positive, on compte positivement l'aire se trouvant dans le demi plan supérieur : $y \geq 0$ et négativement l'aire se trouvant dans le demi plan inférieur : $y \leq 0$

Pour simplifier les calculs on pose :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

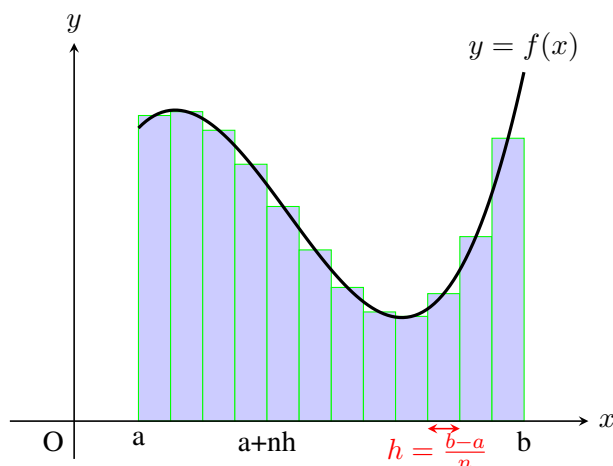
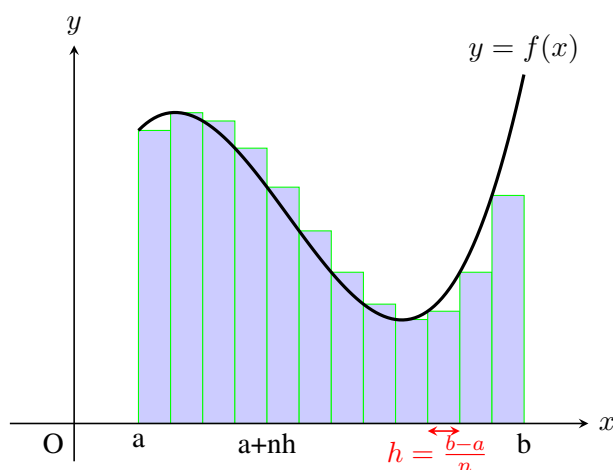
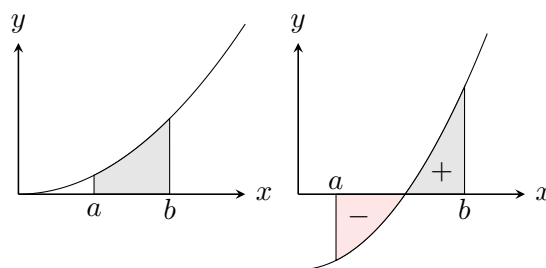
Cette définition de l'intégrale permet de trouver une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$, en considérant des petits rectangles dont la somme des aires est proche de l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$. Pour h assez petit, entre les point $a + nh$ et $a + (n + 1)h$ on peut approcher $\int_{a+nh}^{a+(n+1)h} f(t) dt$, par $h \times f(a + nh)$ l'aire du rectangle "à gauche", en prenant $h = \frac{b-a}{n}$, l'approximation :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\text{et } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

On peut encore améliorer un peu l'approximation en prenant pour hauteur la valeur de f au milieu de chaque petit intervalle $f(a + nh + \frac{1}{2}h)$. On obtient alors, en prenant $h = \frac{b-a}{n}$, l'approximation :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$$



Proposition 2.1 Pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 , on a la majoration de l'erreur commise si l'on remplace l'intégrale par sa valeur approchée avec la méthode des points milieux. :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

2.2 Propriétés élémentaires

Proposition 2.2 Les intégrales possède un grand nombre de propriétés comme

- Chasles : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
- La linéarité : $\int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$.
- La croissance : Si $a < b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- Conséquence de la croissance : Si $a < b$ et $f \leq M$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.
- Si $a < b$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Théorème 2.1 (dit théorème fondamental de l'analyse) Si f est continue, alors la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable de dérivée f . Il s'ensuit que toute fonction continue possède une primitive.

Remarque 2.1 Notation abusive, lorsque l'on note une intégrale sans borne, on veut noter une primitive quelconque de la fonction par exemple : $\int t^3 dt$ représente une primitive de la fonction cube ainsi on a $\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + K$.

2.2.1 Méthodes d'intégration

Proposition 2.3 Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

☐ vidéo 2.2: Intégration par partie.

Théorème 2.2 Intégration par partie :

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$:

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Preuve : On sait que $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$. On intègre cette égalité entre a et b .

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

or $\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b}$. D'où le résultat en retranchant le dernier terme de l'égalité des deux cotés de l'égalité.

Exemple 2.1 $\int_0^\pi x \cos x dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = [\cos x]_0^\pi = -2$

Une IPP permet de trouver facilement une primitive de la fonction logarithme népérien, ainsi que de la fonction arctangente.

Théorème 2.3 Changement de variable :

Soit $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et f une fonction continue sur $[c; d]$, alors

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

Remarque 2.2 Cela revient à poser $x = u(t)$, $dx = u'(t)dt$, et à considérer que lorsque $t = a \leftrightarrow x = u(a)$.

Preuve : Soit F une primitive de f .

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(u(t))dt = [F(u(t))]_a^b = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Remarque 2.3 Il est souvent plus agréable de présenter le changement de variable de la façon suivante dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ on pose $x = h(t)$ et $dx = h'(t)dt$, si il existe α et β tels que $h(\alpha) = a$ et $h(\beta) = b$, on obtient alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Il est parfois plus simple, dans l'intégrale, $\int_a^b f(x)dx$ de poser $t = k(x)$, c'est à dire $k = h^{-1}$, on a encore la relation $dt = k'(x)dx$

Exemple 2.2

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

2.2.2 Fonctions complexes

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , notons f_1 sa partie réelle et f_2 sa partie imaginaire, on a alors $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, par définition la dérivée de f est

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t)$$

de même on définit l'intégrale d'une fonction complexe par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt$$

Remarque 2.4 Ces définitions nous permettent d'avoir encore le théorème fondamental de l'analyse, (théorème 2.1) pour les fonctions complexes.

Proposition 2.4 Soit $g(t) = e^{f(t)}$, alors $g'(t) = f'(t)e^{f(t)}$.

Preuve : Attention ce n'est pas immédiat du tout, il faut revenir à la définition de l'exponentielle complexe

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_1(t)} \left(\cos(f_2(t)) + i \sin(f_2(t)) \right)$$

Il reste ensuite à dériver la partie réelle et la partie imaginaire et à retrouver la formule voulue.

Exemple 2.3 Trouver une primitive de $e^{2x} \sin x$.

$$\int e^{2x} \sin x dx = \int \mathcal{I}m(e^{2x} e^{ix}) dx = \mathcal{I}m \left(\int e^{2x} e^{ix} dx \right) = \mathcal{I}m \left(\frac{1}{2+i} (e^{(2+i)x} + C) \right) = \mathcal{I}m \left(\frac{2-i}{5} (e^{(2+i)x}) \right) + \tilde{C} = \frac{e^{2x}}{5} (2 \cos x + \sin x) + \tilde{C}$$

2.2.3 Linéarisation

Lorsqu'on doit intégrer une fonction qui est un polynôme en les fonctions sinus et cosinus, à part certain cas très simples, on peut linéariser l'expression, c'est à dire effectuer des opérations trigonométriques pour se ramener à des sommes de sinus et de cosinus.

Exemple 2.4 Linéariser $(\cos x)^2(\sin x)^2$.

$$\begin{aligned} (\cos x)^2(\sin x)^2 &= \left(\frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) \right) \left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \right) \\ &= \frac{1}{4}(1 - (\cos 2x)^2) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2}(\cos(4x) + 1) \right) \right) \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \end{aligned}$$

Exemple 2.5 Déterminer les primitives de $\cos^3(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Utilisons un peu les complexes, } \cos^3(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{8}(2 \cos 3x + 6 \cos x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x) \text{ finalement } \int \cos^3(x) dx = \int \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{12}(\sin 3x + 9 \sin x) + C \end{aligned}$$

2.2.4 Intégrales généralisées

Il arrive que l'on ait à intégrer une fonction continue sur un intervalle non borné (comme $\int_0^\infty e^{-t} dt$), ou bien une fonction continue définie sur un intervalle ouvert ou semi ouvert (comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$). On définit alors l'intégrale comme la limite lorsqu'elle existe de l'intégrale sur un intervalle plus petit ainsi :

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} 1 - e^{-A} = 1$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = \lim_{A \rightarrow 0} [2t^{\frac{1}{2}}]_A^1 = \lim_{A \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{A}) = 2$$

fin de la semaine 2 

2.3 Intégration des fractions rationnelles

2.3.1 Introduction

Les fractions rationnelles sont des fonctions qui apparaissent fréquemment, l'objectif principal de cette partie est la décomposition en éléments simples.

 **vidéo 3.1: Décompo**

2.3.2 Définitions

Définition 2.1 • Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes à coefficients réels ou complexes.

- Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est dite irréductible si "on ne peut pas la simplifier", ceci revient à dire que P et Q n'ont aucune racine complexe commune, ou encore que P et Q sont de degré minimal.
- On pose $\deg(\frac{P}{Q}) = \deg P - \deg Q$.
- On dit que a est un pôle d'ordre m de $\frac{P}{Q}$, si a est une racine de Q de multiplicité m , et a n'est pas une racine de P .
- On appelle éléments simples complexes les fractions rationnelles de la forme $\frac{a}{(z+b)^n}$, avec a, b, c des constantes complexes.
- On appelle éléments simples réels les fractions rationnelles de la forme $\frac{a}{(x+b)^n}$, ou $\frac{cx+d}{(x^2+ex+f)^n}$ avec a, b, c, d, e, f des constantes réelles et le discriminant $\Delta = e^2 - 4 < 0$.

Exemple 2.6 • $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)(x-6)^2}$ est irréductible, $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)(x-1)^2}$ et $\frac{x^2-x-2}{(x+1)^2(x-6)^2}$ ne le sont pas.

- degré $\left(\frac{(x-1)^3(x+6)}{(x-3)^2(x-7)^4}\right) = -2$ et 3 est un pôle d'ordre 2.

Proposition 2.5 Soit F une fraction rationnelle, il existe un unique couple (P, H) polynôme, fraction rationnelle tel que $F = P + H$ avec $\deg(H) < 0$. P s'appelle alors la partie entière de F .

Preuve : Il suffit d'effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour obtenir cette décomposition.

Exemple 2.7 $\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)} = x-1 + \frac{3x-1}{x^2+x-2}$

2.3.3 Décomposition en éléments simples

Proposition 2.6 Soit F une fraction rationnelle, et a un pôle d'ordre n de F , il existe une unique suite $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de réels (ou de complexes) telle que $F - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(x-a)^k}$ soit une fraction rationnelle dont a n'est pas un pôle.

Exemple 2.8 $-3 \frac{x^3+20x^2+104x+172}{(x+2)^2(x-4)(x+5)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x^2+9x+29}{(x-4)(x+5)^2}$

Preuve : Pour l'unicité, on part de deux décompositions, on multiplie par $(x-a)^n$ et on fait tendre x vers a , on a $\lambda_n = \lambda'_n$, puis on recommence avec $n-1$ et ainsi de suite. Pour l'existence c'est un peu plus compliqué, on peut commencer par démontrer le résultat suivant : Étant donnée deux polynômes P et Q tels que $Q(0) \neq 0$, et n un entier, il existe un polynôme T de degré $n-1$, tel que $P-TQ$ admette 0 comme racine de multiplicité n . Ceci se démontre facilement car il revient à résoudre un système triangulaire à diagonale sans 0 . Ensuite on applique ce résultat à \tilde{P} et \tilde{Q} définis de la façon suivante si $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, on pose $\tilde{P}(x) = P(x+a)$ et $\tilde{Q}(x) = Q(x+a)$.

Théorème 2.4 Décomposition en éléments simples

Une fraction rationnel s'écrit toujours comme la somme d'un polynôme et d'une suite d'éléments simples. Cette décomposition est unique si les dénominateurs des éléments simples sont différents deux à deux. Soient P et Q deux polynômes réels tels que $\deg P < \deg Q$, et (λ_i) une famille de réels distincts deux à deux.

1. Si $Q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ alors il existe une unique famille de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + \frac{a_2}{X - \lambda_2} + \dots + \frac{a_n}{X - \lambda_n}$$

2. Si $Q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$ alors il existe une unique famille de réels * tels que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{*}{(X - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{*}{(X - \lambda_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{*}{X - \lambda_1} + \frac{*}{(X - \lambda_2)^{m_2}} + \dots + \frac{*}{(X - \lambda_2)} + \dots + \frac{*}{X - \lambda_n}$$

3. Si $Q = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)^{m_k} \prod_{l=1}^m (X^2 + \gamma_l X + \delta_l)^{\beta_l}$ avec $\gamma_l^2 - 4\delta_l < 0$ alors il existe une unique famille de réels * tels que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{*}{(X - \lambda_1)^{m_1}} + \dots + \frac{*}{X - \lambda_n} + \frac{*X + *}{(X^2 + \gamma_l X + \delta_l)^{\beta_1}} + \frac{*X + *}{(X^2 + \gamma_l X + \delta_l)^{\beta_1-1}} \dots + \frac{*X + *}{X^2 + \gamma_m X + \delta_m}$$

Preuve : Les deux premiers points découlent de la proposition 2.6, en réitérant le procédé pour chacun des pôles, le point 3 est plus compliqué, il faut passer par les complexes, puis re-associer les pôles complexes qui sont conjugués.

Exemple 2.9 • $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}$.

• $\frac{x^4}{(x+1)(x+2)^2} = x - 5 + \frac{1}{x+1} - \frac{16}{(x+2)^2} + \frac{16}{x+2}$.

• $\frac{3}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$.

• $\frac{9}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3x-3}{(x^2+2)^2}$

Remarque 2.5 La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle irréductible de degré < 0 , $\frac{P}{Q}$ comporte exactement un nombre de constantes égale au degré de Q .

Méthode de décomposition en éléments simples (M1) :

1. Division euclidienne pour que le numérateur soit de degré strictement inférieur au dénominateur.
2. Écrire la fraction sous forme d'une somme d'éléments simples avec des coefficients inconnus.
3. A l'aide de différentes limites, trouver les différents coefficients inconnus.

(a) si a est un pôle simple le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ s'obtient en multipliant l'égalité précédente par $(x-a)$ est en faisant tendre x vers a .

(b) si a est un pôle d'ordre m le coefficient de $\frac{1}{(x-a)^m}$ s'obtient en multipliant l'égalité précédente par $(x-a)^m$ est en faisant tendre x vers a .

(c) En soustrayant le terme trouvé précédemment $\frac{\lambda}{(x-a)^m}$, on retombe sur un pôle d'ordre $m-1$.

(d) On peut utiliser les limites en l'infini, après avoir multiplié par un x^k bien choisi.

(e) On peut écrire l'égalité pour un x fixé, bien choisi, réel ou complexe.

Exemple 2.10 Déterminer les primitives de $\frac{2X^3+X-4}{X-1}$

$$\int \frac{2t^3+t-4}{t-1} dt = \int \frac{(2t^2+2t+3)(t-1)-1}{t-1} dt = \int 2t^2 + 2t + 3 + \frac{-1}{t-1} dt = \frac{2}{3}t^3 + t^2 + 3t - \ln|t-1| + C$$

Méthode d'intégration des fractions rationnelles (M2) :

1. Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

2. Intégrer les différents éléments simples :

(a) $\int \frac{1}{t-a} dt = \ln|t-a| + K.$

(b) $\int \frac{1}{(t-a)^m} dt = \frac{1}{1-m} \frac{1}{(t-a)^{m-1}} + K$ pour $m > 1.$

(c) $\int \frac{2t+b}{t^2+bt+c} dt = \int \frac{2t+b}{t^2+bt+c} + \frac{a-b}{t^2+bt+c} dt = \ln(t^2 + bt + c) + \int \frac{a-b}{(t+\frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}} dt.$ Or cette dernière intégrale n'est rien d'autre qu'une arctangente.

(d) $\int \frac{2t+a}{(t^2+bt+c)^m} dt.$ Le calcul pour ces éléments simples là, est plus difficile à effectuer, on peut les calculer en se ramenant à des intégrales du type $\int \frac{1}{(1+t^2)^m} dt$ que l'on peut calculer à l'aide d'IPP.

fin de la semaine 3 

Chapitre 3

Introduction à l'étude des fonctions de plusieurs variables

Notations du cours : En générale dans ce cours les lettres

- latines minuscules m, n, p, q, i, j, k représentent des entiers naturels $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q.$
- latines minuscules x, y, t, a, b, l représentent des réels.
- grecques minuscules η (êta), δ (delta), r représentent des réels strictement positifs.
- latines majuscules X, Y, P, M, N, S, T, V représentent des éléments de $\mathbb{R}^p.$
- latines majuscules A, B représente une partie de $\mathbb{R}.$
- latines majuscules I, J représente un intervalle de $\mathbb{R}.$
- grecques majuscules Ω (omega), représente une partie de $\mathbb{R}^p.$
- grecques majuscules \mathcal{O} (omicron), représente une partie ouverte de $\mathbb{R}^p.$
- latines minuscules f, g, h représentent des fonctions de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}.$
- grecques minuscules φ (phi), ψ (psi), γ (gamma) représentent des fonctions de \mathbb{R}^p dans $\mathbb{R}.$
- grecques majuscules Φ (phi), Ψ (psi) représentent des fonctions de \mathbb{R}^p dans $\mathbb{R}^q.$
- grecques majuscules Γ représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p.$

Prérequis et résultats utiles :

1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, si f possède un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
2. Définition de la dérivée de f en a : lorsque la limite suivante existe et est finie $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
3. f est dérivable en a si et seulement si f possède un DL_1 en a , (l'équivalence n'est pas vrai pour les DL_2).
4. Le théorème des accroissement finis :
soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a; b[$, il existe $c \in]a; b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
5. Le théorème de Taylor Lagrange à l'ordre 2 : soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, deux fois dérivable sur $]a; b[$, il existe $c \in]a; b[$, $f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2$
6. Décomposition de Gauss des formes quadratiques, signature. (Cours d'algèbre du S3)
7. Diagonalisation en base orthogonale des matrices symétriques. (Cours d'algèbre du S3)
8. Existence d'une borne supérieure pour les parties non vides majorées de \mathbb{R} .

3.1 Motivation disciplinaire

Problème très fréquent en sciences : optimiser

- Flux de voitures sur une autoroute
- Bénéfice d'une entreprise
- Vitesse d'une réaction chimique
- Consommation d'un moteur
- Résistance d'un béton
- légèreté d'une structure métallique
- ...

De très nombreuses méthodes mathématiques pour répondre à ce problème : simplexe ; recuit simulé ; gradient conjugué, méthodes variationnelle, multiplicateurs de Lagrange, ...

On va regarder le cas des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , avec une méthode : essayer de copier ce que l'on fait dans \mathbb{R} .

Exemple de niveau 4ème : plus court chemin entre deux points passant par une droite (exemple ou construire un port, entre deux ville)

3.2 Cas réel

Exemple de la fonction $f(x) = x^2 e^x$,

Tableau de variation, minimum local, minimum global

Définition 3.1 *minimum local, minimum global (écriture distance ; écriture intervalle)*

📺 vidéo 4.2: Fonctions affine

3.3 Fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

Comme pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} on peut définir la somme et le produit de fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , pour la composé c'est un peu plus compliqué.

Définition 3.2 *soit $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on définit $\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2$ et $f \circ \varphi_1$ par pour $X \in \Omega$:*

$$\begin{cases} (\varphi_1 + \varphi_2)(X) = \varphi_1(X) + \varphi_2(X) \\ (\varphi_1 \varphi_2)(X) = \varphi_1(X) \varphi_2(X) \\ (f \circ \varphi_1)(X) = f(\varphi_1(X)) \end{cases}$$

Pour la composition à droite c'est un peu plus compliqué pour I un intervalle de \mathbb{R} et $u_1, u_2, \dots, u_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que pour tout $t \in I$, le point $M(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t))$ appartienne à Ω . Alors la fonction $\varphi_1 \circ (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est définie par

$$\begin{array}{l|l} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi_1(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \end{array}$$

Définition 3.3 Lorsque l'on a une formule de p variables, on peut chercher à savoir quand cette formule a un sens. L'ensemble des valeurs pour laquelle cette formule définit un réel est appelé l'ensemble de définition de la formule.

Exemple 3.1 L'ensemble de définition de $\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$ est le disque de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.4 La distance entre deux points X et Y de \mathbb{R}^p est la norme du vecteur \overrightarrow{XY} ,

$$d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (y_i - x_i)^2}$$

où $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$. Le vecteur $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_p - x_p)$.

Définition 3.5 $B(P, r) = \{X \in \mathbb{R}^p / \|\overrightarrow{PX}\| \leq r\}$ la boule de centre P et de rayon $r > 0$, c'est à dire l'ensemble des points dont la distance à P est inférieure à r .

Définition 3.6 soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, φ possède :

- un maximum global en $P \in \Omega$ si $\forall X \in \Omega, \varphi(X) \leq \varphi(P)$
- un minimum global en $P \in \Omega$ si $\forall X \in \Omega, \varphi(X) \geq \varphi(P)$
- un maximum local en $P \in \Omega$ si $\exists r > 0, \forall X \in \Omega \cap B(P, r), \varphi(X) \leq \varphi(P)$
- un minimum local en $P \in \Omega$ si $\exists r > 0, \forall X \in \Omega \cap B(P, r), \varphi(X) \geq \varphi(P)$

3.4 \mathbb{R}^p et ses propriétés.

Structure d'espace vectoriel : $(\mathbb{R}^p, +, \cdot)$

$(x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p)$ et $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_p)$

Structure d'espace euclidien : $(\mathbb{R}^p, +, \cdot, \otimes)$

$X \otimes Y = \sum_{i=1}^p x_i y_i$, avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$.

\otimes est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^p , on note aussi $X \otimes Y = \langle X; Y \rangle = X \cdot Y$

Définition 3.7 Norme $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2} = \sqrt{X \otimes X}$, pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$
 $X \perp Y$ si $X \cdot Y = 0$

Proposition 3.1 Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
- $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Remarque 3.1 \mathbb{R}^p a une structure d'espace vectoriel (ensemble de vecteurs) mais aussi une structure affine (espace de points), ainsi pour deux points de \mathbb{R}^p : M et X , on pourra noter \overrightarrow{MX} pour indiquer qu'il s'agit d'un vecteur, on aura alors $\overrightarrow{MX} = X - M$. La différence entre un point et un vecteur réside dans le fait que les coordonnées d'un vecteur restent invariant par changement d'origine du repère alors que les coordonnées d'un point sont modifiées.

On a par exemple

- $\overrightarrow{XY} = Y - X$
- $X = Y + \overrightarrow{YX}$

3.5 Représentation graphique des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Ensemble de définition, graphe, représentation graphique, ...

Présentation avec geogebra 3D des ensembles de définition et des graphes de $\varphi_1(x, y) = \sqrt{12 - 3(x^2 + y^2)}$ et $\varphi_2(x, y) = x(x - 1)(x - 2) + y^2$

☐ vidéo 4.1: \mathbb{R}_e

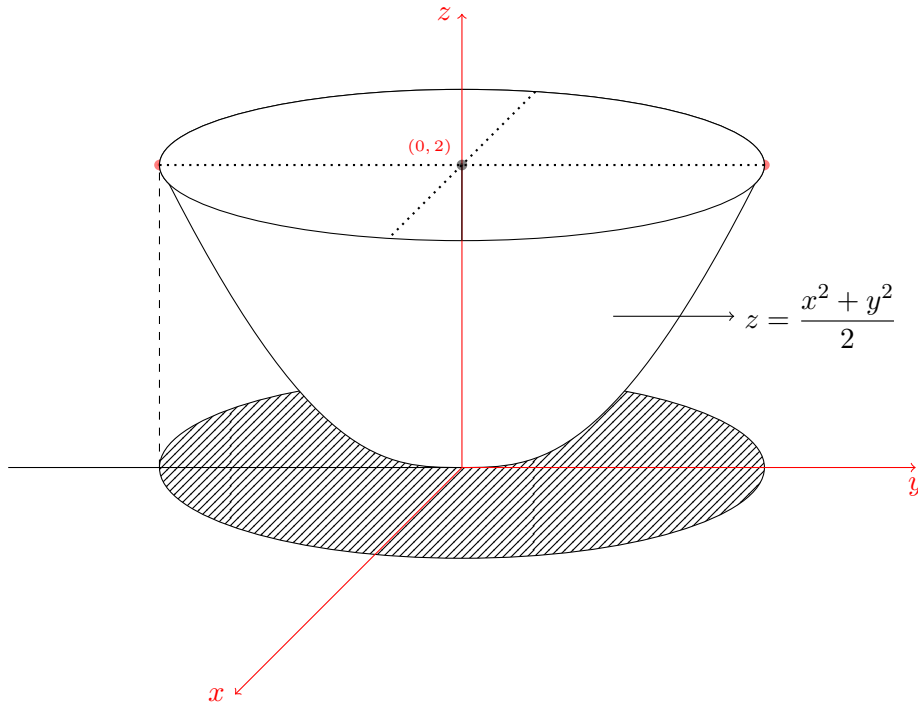


FIGURE 3.1 – Représentation du graphe de la fonction $\varphi(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$

Exemple 3.2 Ensemble de définition, courbes de niveau et représentation graphique $\varphi(x, y) = \sqrt{xy}$, $\varphi(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$

Le graphe d'une fonction de deux variables est une surface de l'espace, pour $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le graphe de φ est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \varphi(x, y)\}$.

Chapitre 4

Dérivation

4.1 Objectif, méthode

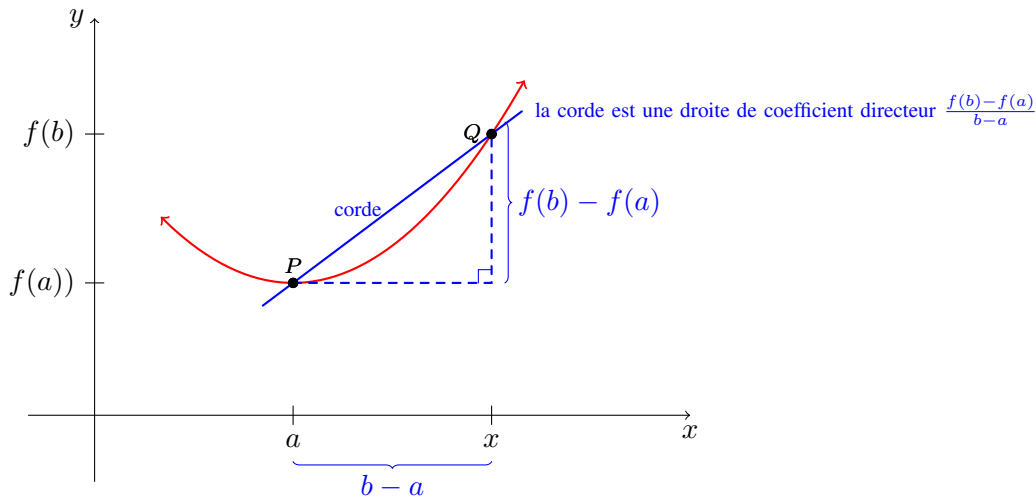
Objectif : Extrema des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

Méthode : Utiliser ce que l'on sait faire pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , avec le problème très important qu'il n'y a pas les notions de fonctions croissantes et décroissantes pour ces fonctions.

4.2 Rappel cas réel

Pour étudier les extrema d'une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , on peut construire un tableau de variations, pour cela on dérive la fonction et on étudie le signe de la dérivée, quelques rappels :

Définition 4.1 Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$, la fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a si la fonction définie par $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie en a , dans ce cas on note $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.



Proposition 4.1 • Si f est dérivable en a alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et telle que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

• Si il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et un réel α tels que

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

Remarque 4.1 Une interprétation en terme de corde : la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(t, f(t))$ a pour équation $y = f(a) + \left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)(x - a)$ si "l'on fait tendre" t vers a la corde "tend" vers la tangente à la courbe représentative de f , qui a alors pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$f'(a)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative \mathcal{C} de f en $(a, f(a))$. On remarque alors que $(x - a)\varepsilon(x)$ du DL₁ correspond à l'écart qui existe entre la fonction f et la fonction définie par la tangente à f en a : $h(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

📺 vidéos 5.1: Comment dériver une fonction de deux variable

4.3 Dérivées partielles

Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p et $\varphi : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto & \varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{cases}$ Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, pour se ramener au cas que l'on connaît bien les fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on fixe toutes les variables sauf 1 par exemple x_i et on pose $h(t) = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$.

Définition 4.2 Si la fonction h est dérivable en a_i on dit que φ possède une dérivée partielle par rapport à la i ème variable, en A , et on pose :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(A) = h'(a_i)$$

Définition 4.3 On appelle fonctions partielles en A de φ les fonctions définies ainsi $\varphi_i(t) = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$.

Remarque 4.2 Si φ possède en A un extremum local, alors chacune des fonctions φ_i possède en a_i un extremum, à la condition que φ_i est dérivable en a_i alors $\varphi'_i(a_i) = 0$, et donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(A) = 0$. Pour que la fonction φ_i soit dérivable en a_i il faut que φ_i soit définie autours de a_i et qu'elle soit dérivable en a_i .

📺 vidéos 5.2: \mathbb{R}^e

4.4 Intérieur

Si $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ possède un extremum en $M = (m_1, m_2, \dots, m_p)$, alors les fonctions partielles h_i possède un extremum en m_i , en supposant que les m_i sont dérivables, pour être certain que leur dérivée sont nulles en m_i , il faut que m_i ne soit pas sur un bord, il faut que h_i soit définie autours de m_i , sur un intervalle $]m_i - \varepsilon, m_i + \varepsilon[$. Une condition suffisante pour cela c'est demander que les points autours de M appartiennent à Ω .

Définition 4.4 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , Omega est constitué de points qui se trouve sur le bord ($\partial\Omega$) de Ω et de points à l'intérieur de Ω : $\overset{\circ}{\Omega} = \{X \in \mathbb{R}^p / \forall r > 0, B(X, r) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } B(X, r) \cap (\mathbb{R}^p \setminus \Omega) \neq \emptyset\}$

$$\overset{\circ}{\Omega} = \{X \in \Omega / \exists r > 0, B(X, r) \subset \Omega\} = \{X \in \Omega / \exists r > 0, \forall M \in \mathbb{R}^p, \|X - M\| < r \Rightarrow M \in \Omega\}$$

Lorsque $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, et $\mathcal{O} = \overset{\circ}{\mathcal{O}}$ on dit que \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^p .

Proposition 4.2 Soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si φ possède un extremum local en $P \in \overset{\circ}{\Omega}$ et que φ possède des dérivées partielles par rapport à toutes les variables en P alors, toute les dérivées partielles de φ sont nulles en P .

Définition 4.5 On appelle point critique de φ un point ou toutes les dérivées partielles sont définies et sont nulles.

Exemple 4.1 $f(x) = x^2$ sur $[-2; 3]$.

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \text{ sur } [-1; 1] \times [-1; 1].$$

Exemple 4.2 $\varphi(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ pour $(x_1; x_2) \neq (0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$.

- Dérivées partielles
- Courbes de niveaux
- Étude en 0. Extremum ?

Pour étudier une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ au "voisinage" d'un point P , il est raisonnable de vérifier que $\varphi(M)$ est proche de $\varphi(P)$ lorsque M est proche de P . Or on vient de voir sur un exemple que l'existence des dérivées partielles en P ne garantit pas cela. Or les fonctions partielles étant dérivables elles sont continues, visiblement cela ne suffit pas, il nous faut donc une propriété différente des propriétés des fonctions partielles.

fin de la semaine 4 

Chapitre 5

Continuité

5.1 Objectif, méthode

Objectif : Définir et pouvoir reconnaître si une fonction à bien la propriété naturelle, "des points proches ont des images proches"

Méthode : Utiliser ce que l'on sait faire pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

5.2 Rappel cas réel

Définition 5.1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$, la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

5.3 Pour les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}

Définition 5.2 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, la fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en P si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Omega, \|X - P\| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(X) - \varphi(P)| < \varepsilon$$

Lorsque φ est continue en tout point de Ω on dit que φ est continue.

Remarque 5.1 Dans le cas où $p = 1$, on obtient bien la définition de continuité que l'on connaissait car dans ce cas $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$.

$\|X - P\|$ correspond à la distance entre X et P , quitte à prendre X assez proche de P , "dans toutes les directions", on doit avoir $\varphi(X)$ aussi proche de $\varphi(P)$ que l'on veut.

Définition 5.3 On dit qu'une suite (X_n) d'éléments de \mathbb{R}^p converge vers $U \in \mathbb{R}^p$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|X_n - U\| \leq \varepsilon$$

Théorème 5.1 (Continuité séquentielle) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \in \Omega$. La fonction φ est continue en U ssi pour toute suite (X_n) d'éléments de Ω qui converge vers U on a

$$\lim \varphi(X_n) = \varphi(U)$$

Preuve : Supposons que φ est continue au point U . Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall X \in \Omega, \|X - U\| < \delta \Rightarrow |\varphi(X) - \varphi(U)| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

On doit montrer que pour toute suite $(X_k)_k$ de points de Ω qui converge vers U , on a $\varphi(X_k)$ qui converge vers $\varphi(U)$. Soit donc $(X_k)_k$ une suite de points de Ω telle que la suite (X_k) converge vers U . Par définition de la convergence,

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists K \in \mathbb{N} / \forall k \geq K, \|X_k - U\| < \varepsilon'.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall X \in \Omega, \|X - U\| < \delta \Rightarrow |\varphi(X) - \varphi(U)| < \varepsilon \quad (5.2)$$

Or il existe K tel que :

$$\forall k \geq K, \|X_k - U\| < \delta.$$

Ce qui grâce à (2) entraîne que pour tout $k \geq K$, $|\varphi(X_k) - \varphi(U)| < \varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, on a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} / \forall k \geq K, |\varphi(X_k) - \varphi(U)| < \varepsilon,$$

i.e. $(\varphi(X_k))$ converge vers $\varphi(U)$.

Pour la réciproque, on raisonne par contraposition. On suppose donc que φ n'est pas continue, et on va construire une suite $(X_k)_k$ d'éléments de Ω qui converge vers U mais telle que la suite de réels $(\varphi(X_k))$ ne converge pas vers $\varphi(U)$. On écrit la négation de la continuité de φ :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists X \in \Omega, \|X - U\| < \delta \text{ et } |\varphi(X) - \varphi(U)| \geq \varepsilon.$$

Pour $\delta = 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient donc l'existence de $X_k \in \Omega$ tel que $\|X_k - U\| < 1/k$ et $|\varphi(X_k) - \varphi(U)| \geq \varepsilon$. Le fait que $\|X_k - U\| < 1/k$ pour tout k entraîne que la suite $(X_k)_k$ converge vers U , tandis que $|\varphi(X_k) - \varphi(U)| \geq \varepsilon$ pour tout k prouve que $\varphi(X_k)$ ne converge pas vers $\varphi(U)$. Ainsi, on a bien construit une suite $(X_k)_k$ d'éléments de Ω qui converge vers U mais telle que $\varphi(X_k)$ ne converge pas vers $\varphi(U)$.

Proposition 5.1 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, et $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si φ et ψ sont continues en P alors $\varphi + \psi$ et $\varphi\psi$ sont continues en P .

Preuve : En utilisant la continuité séquentielle, on se ramène au cas réel : Soit (X_n) une suite d'éléments de Ω qui converge vers P , alors que dire de la suite de réels $(\varphi(X_n)\psi(X_n))$

5.4 Continuité et composition

Proposition 5.2 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , A une partie de \mathbb{R} , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $P \in \Omega$,

- Si φ est continue en P et f est continue en $\varphi(P)$ alors $f \circ \varphi$ est continue en P .
- Si $\varphi(\Omega) \subset A$, φ est continue, et f est continue alors $f \circ \varphi$ est continue.

Preuve : Soit (X_n) une suite d'éléments de Ω qui converge vers P . Que dire de $(\varphi(X_n))$ puis de $(f \circ \varphi(X_n))$

Proposition 5.3 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , A une partie de \mathbb{R} , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \Omega$, Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

φ est une fonction continue en P si et seulement si pour toutes fonctions $h_1, h_2, \dots, h_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\begin{cases} \exists t_0 \in I, P = \varphi(h_1(t_0), h_2(t_0), \dots, h_p(t_0)) \\ \forall t \in I, (h_1(t), h_2(t), \dots, h_p(t)) \in \Omega \end{cases}$$

la fonction h définie sur I par $h(t) = \varphi(h_1(t), h_2(t), \dots, h_p(t))$ est continue.

Définition 5.4 On note p_i (ou dx_i) la projection sur la i ème coordonnées :

$$p_i : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto x_i \end{cases}$$

Proposition 5.4 Les projections dx_i sont continues.

Preuve : Pour tout i , $|p_i(X) - p_i(T)| \leq \|X - T\|$ en effet $|x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p (x_k - y_k)^2}$

Proposition 5.5 Les sommes, produits et composées de fonctions continues sont continues.

Les projections dx_i sont continues.

📺 vidéo 5.3: Continuité pour une fonction de deux variable

5.5 Limites

La notion de continuité en un point est très proche pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de la notion de limite.

La principale différence réside dans le fait que la continuité se définit en un point où la fonction f est définie alors que la limite peut s'étudier en un point où la fonction n'est pas définie.

Définition 5.5 Soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et T proche de Ω .

$$\lim_{X \rightarrow T} \varphi(X) = l \text{ si}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Omega, \|X - T\| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(X) - l| \leq \varepsilon$$

Proposition 5.6 Si $T \in \Omega$, φ est continue en T si et seulement si $\lim_{X \rightarrow T} \varphi(X) = \varphi(T)$.

Exemple 5.1 $\varphi(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Chapitre 6

Fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

6.1 Objectif, méthode

Objectif : Pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la dérivabilité entraîne la continuité. Pour les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} n'entraîne pas la continuité, existe-t-il une notion qui englobe, existence de dérivées partielles et continuité.

Objectif général : Les extrema

Méthode : Utiliser ce que l'on sait faire pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

6.2 Rappel cas réel

Si f a un extremum en a qui n'est pas sur les bords, et f dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

6.3 Fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 6.1 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, est de classe \mathcal{C}^1 si φ possède des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, en tout point de \mathcal{O} , et que ces dérivées partielles sont continues sur \mathcal{O} .

Proposition 6.1 Les projections sur les axes (dx_i) sont de classe \mathcal{C}^1 .

Preuve : On rappelle que

$$dx_i : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto x_i \end{cases}$$

La dérivée par rapport à la i ème variable de dx_i est égale à 1 c'est une fonction continue sur \mathbb{R}^p . La dérivée de dx_i par rapport à une autre variable est égale à 0 qui est aussi continue.

Proposition 6.2 Soient $\varphi, \psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe \mathcal{C}^1 alors $\phi + \psi$ et $\phi\psi$ sont de classe \mathcal{C}^1 . Si $\phi(\mathcal{O}) \subset I$, et que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors $f \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Preuve : Les dérivées partielles se ramènent à des dérivées normales et ensuite ce sont juste les théorèmes sur la continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x_i}(X) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X) + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(X) \\ \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i}(X) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X)\psi(X) + \varphi(X)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(X) \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(X) &= (f' \circ \varphi)(X) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X) \end{aligned}$$

6.4 DL₁

 vidéo 6.1: Dévelo

Théorème 6.1 (DL₁) Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $M \in \mathcal{O}$, il existe alors $\varepsilon : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\lim_{X \rightarrow M} \varepsilon(X) = 0$ et pour tout $X \in \mathcal{O}$

$$\varphi(X) = \varphi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) + \|X - M\|\varepsilon(X)$$

où $M = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Exemple 6.1 Écrire un DL₁ de φ en (2,1) pour $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$.

Remarque 6.1 On peut écrire l'égalité précédente légèrement différemment avec $V = X - M = \overrightarrow{MX}$:

$$\forall V \in \mathbb{R}^p, M + V \in \mathcal{O} \Rightarrow \varphi(M + V) = \varphi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)(v_i) + \|V\|\varepsilon(V)$$

avec $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$.

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)$ est un réel c'est la dérivée partielle de φ par rapport à la i ème variable au point M .

Définition 6.2 On note $d_M \varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, et on appelle différentielle de φ en M l'application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p, d_M \varphi(v_1, v_2, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)v_i$$

Remarque 6.2 Le théorème 6.1 s'écrit alors

$$\forall X \in \mathcal{O}, \varphi(X) = \varphi(M) + d_M \varphi(X - M) + \|X - M\|\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_M \varepsilon = 0$$

$$\forall X \in \mathcal{O}, \varphi(X) = \varphi(M) + d_M \varphi(\overrightarrow{MX}) + \|\overrightarrow{MX}\|\varepsilon(\overrightarrow{MX}) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0$$

à rapprocher du DL₁ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Preuve : [du théorème 6.1 dans le cas $p = 2$]

La preuve est basée sur le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable que l'on applique aux fonctions partielles d'une fonction de deux variables, on peut l'appliquer car ces applications partielles sont \mathcal{C}^1 .

Posons pour $X \in \mathcal{O} \setminus \{M\}$

$$\psi(X) = \frac{\varphi(X) - \left(\varphi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) \right)}{\|X - M\|}$$

Comme \mathcal{O} est un ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset \mathcal{O}$, soit $X = (x_1, x_2) \in B(M, r)$

$$\psi(X) \tag{6.1}$$

$$= \frac{\varphi(X) - \left(\varphi(M) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2) \right)}{\|X - M\|} \tag{6.2}$$

$$= \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(m_1, m_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2)}{\|X - M\|} \tag{6.3}$$

$$= \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(m_1, x_2) + \varphi(m_1, x_2) - \varphi(m_1, m_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2)}{\|X - M\|} \tag{6.4}$$

On peut alors appliquer le TAF

Il existe u_1 compris entre x_1 et m_1 et u_2 compris entre x_2 et m_2 tel que

$$\psi(X) \tag{6.5}$$

$$= \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(m_1, x_2) + \varphi(m_1, x_2) - \varphi(m_1, m_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2)}{\|X - M\|} \tag{6.6}$$

$$= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1, x_2)(x_1 - m_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, u_2)(x_2 - m_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2)}{\|X - M\|} \tag{6.7}$$

$$= \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2) \right] (x_1 - m_1) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, u_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2) \right] (x_2 - m_2)}{\|X - M\|} \tag{6.8}$$

Or $|x_1 - m_1| \leq \|X - M\|$ et $|x_2 - m_2| \leq \|X - M\|$.

$$|\psi(X)| \leq \frac{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2) \right| |x_1 - m_1| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, u_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2) \right| |x_2 - m_2|}{\|X - M\|} \tag{6.9}$$

$$\leq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(m_1, m_2) \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, u_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(m_1, m_2) \right| \tag{6.10}$$

Avec u_1 compris entre x_1 et m_1 et u_2 compris entre x_2 et m_2 .

Soit $\varepsilon > 0$ comme $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est continue en M , il existe $\eta_i > 0$ telle que

$$\|X - M\| \leq \eta_i \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Comme $\|(u_1, x_2) - (m_1, m_2)\| \leq \|X - M\|$ et $\|(m_1, u_2) - (m_1, m_2)\| \leq \|X - M\|$, il suffit de prendre $\|X - M\| \leq \min(\eta_1, \eta_2)$, pour s'assurer que $|\psi(X)| \leq \varepsilon$.

Donc la fonction ψ tend vers 0, lorsque X tend vers M , c'est justement l'énoncé du théorème à démontrer.

Remarque 6.3 Le théorème 6.1 s'écrit

$$\forall X \in \mathcal{O}, \varphi(X) = \varphi(M) + d_M \varphi(X - M) + \|X - M\| \varepsilon(X)$$

$d_M \varphi$ est une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , cette application est linéaire, elle est égale à

$$d_M \varphi = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) dx_i = \sum_{i=1}^p \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)}_{\substack{\text{dérivée de } \varphi \text{ par} \\ \text{rapport à la } i\text{ème} \\ \text{variable au point } M}} \underbrace{dx_i}_{\substack{\text{projection} \\ \text{sur la } i\text{ème} \\ \text{coordonnée}}}$$

En effet on se rappelle que $dx_i(v_1, v_2, \dots, v_p) = v_i$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)$ est un réel, donc

$$\left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) dx_i \right) (V) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) \right) dx_i(V) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) v_i = d_M \varphi(V)$$

Cette notation s'interprète aussi en infinitésimal si x_1 varie de δx_1 , x_2 varie de δx_2 , etc ... alors φ varie de $\sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M) \delta x_i$, c'est comme si la variation dû à x_1 s'ajoute à la variation dû à x_2 , etc ...

Remarque 6.4 Lorsque $p = 2$, ce DL₁ justifie que pour une fonction de deux variables, de classe \mathcal{C}^1 , le plan tangent au graphe de φ (cad $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \varphi(x, y)\}$) au point M a pour équation :

$$z = \varphi(M) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M)(x - m_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M)(y - m_2)$$

En particulier en un point critique le plan tangent est horizontal.

📺 vidéo 6.2: Notations différentielle

fin de la semaine 5 

6.5 Composition

Exemple 6.2 Soit $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h(t) = \varphi(f(t), g(t))$.

Déterminer $h(t)$.

Déterminer $h'(t)$.

Exprimer $h'(t)$, en fonction de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$.

📺 **vidéo 7.1**: Dérivée d'une compo

d'une variable.

Petit rappel DL₁

Théorème 6.2 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $u_1, u_2, \dots, u_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que pour tout $t \in I$, le point $M(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t))$ appartienne à \mathcal{O} . Alors la fonction f

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) u'_i(t)$$

Remarque 6.5 Ce résultat n'est pas étonnant, juste de façon approximative et non rigoureuse :

$$f(t + \delta_t) - f(t) \tag{6.11}$$

$$= \varphi(u_1(t + \delta_t), u_2(t + \delta_t), \dots, u_p(t + \delta_t)) - \varphi(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \tag{6.12}$$

$$\cong \varphi(u_1(t) + u'_1(t)\delta_t, u_2(t) + u'_2(t)\delta_t, \dots, u_p(t) + u'_p(t)\delta_t) - \varphi(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \tag{6.13}$$

$$\cong \sum_{i=1}^p \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t))}_{\text{La dérivée partielle de } \varphi \text{ par rapport à } x_i \text{ au point } (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t))} (u'_i(t)\delta_t) \tag{6.14}$$

$$\cong \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) u'_i(t) \right) \delta_t \tag{6.15}$$

Le passage de 6.12 à 6.13 correspond à remplacer chaque $u_i(t + \delta_t)$ par la partie principale de son DL₁ en t :

$$u_i(t + \delta_t) \cong u_i(t) + u'_i(t)\delta_t.$$

Le passage de 6.13 à 6.14 correspond à remplacer $\varphi(M + V)$ par la partie principale de son DL₁ en M , voir le théorème 6.1 :

$$\varphi(X + V) - \varphi(X) \cong \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)(v_i) \text{ avec } V = (u'_1(t)\delta_t, u'_2(t)\delta_t, \dots, u'_p(t)\delta_t)$$

Preuve : Dans le cas $p = 2$ on va donner une preuve un peu plus rigoureuse, c'est à dire en tenant compte des restes : Soit $a \in I$, pour t assez petit $a + t \in I$ ($|a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$) Étudions $\frac{f(a+t) - f(a)}{t}$

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{t} \tag{6.16}$$

$$= \frac{1}{t} [\varphi(u_1(a+t), u_2(a+t)) - \varphi(u_1(a), u_2(a))] \tag{6.17}$$

$$= \frac{1}{t} [\varphi(u_1(a) + u'_1(a)t, u_2(a) + u'_2(a)t) - \varphi(u_1(a), u_2(a))] \tag{6.18}$$

$$= \frac{1}{t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1(a), u_2(a))(u'_1(a)t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u_1(a), u_2(a))(u'_2(a)t) + \|(u'_1(a)t, u'_2(a)t)\| \varepsilon(u'_1(a)t, u'_2(a)t) \right] \tag{6.19}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1(a), u_2(a))u'_1(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u_1(a), u_2(a))u'_2(a) + \|(u'_1(a), u'_2(a))\| \varepsilon(u'_1(a)t, u'_2(a)t) \tag{6.20}$$

Le passage de 6.17 à 6.18 correspond à l'application du TAF pour les fonctions u_1 et u_2 , il existe donc a_1 compris entre a et $a + t$ tel que $u_1(a + t) = u_1(a) + u'_1(a_1)t$ et a_2 compris aussi entre a et $a + t$ tel que $u_2(a + t) = u_2(a) + u'_2(a_2)t$.

Évidemment a_1 et a_2 dépendent de t mais lorsque t tend vers 0, a_1 et a_2 tendent vers a .

Le passage de 6.18 à 6.19 correspond à écrire le DL₁ de φ au point $(u_1(a), u_2(a))$, voir le théorème 6.1 :

$$\varphi(X + V) - \varphi(X) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X)(v_i) + \|V\|\varepsilon(V) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient $\lim_{t \rightarrow 0} u'_1(a_1) = u'_1(a)$ car u_1 est \mathcal{C}^1 . $\lim_{t \rightarrow 0} u'_2(a_2) = u'_2(a)$ car u_2 est \mathcal{C}^1 d'après la proposition ?? comme $\lim_{t \rightarrow 0} tu'_1(a_1) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} tu'_2(a_2) = 0$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$ on conclut que $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(u'_1(a_1)t, u'_2(a_2)t) = 0$

Enfin on remarque que $\lim_{t \rightarrow 0} \|(u'_1(a_1), u'_2(a_2))\| = \|(u'_1(a), u'_2(a))\|$ finalement comme u_1 et u_2 sont continues

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1(a), u_2(a))u'_1(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u_1(a), u_2(a))u'_2(a)$$

Dans cette formule

$$\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_1(a), u_2(a))}_{\substack{\text{La dérivée partielle} \\ \text{de } \varphi \text{ par rapport à } x_1 \\ \text{au point } (u_1(a), u_2(a))}} \cdot \underbrace{u'_1(a)}_{\substack{\text{La dérivée} \\ \text{de } u_1 \text{ en } a}} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(u_1(a), u_2(a))}_{\substack{\text{La dérivée partielle} \\ \text{de } \varphi \text{ par rapport à } x_2 \\ \text{au point } (u_1(a), u_2(a))}} \cdot \underbrace{u'_2(a)}_{\substack{\text{La dérivée} \\ \text{de } u_2 \text{ en } a}}$$

Exemple 6.3 $f(t) = \varphi(t^2; \sin(t))$, si φ est \mathcal{C}^1 alors f aussi et $f'(t) = 2t \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t^2; \sin(t)) + \cos(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t^2; \sin(t))$, et par exemple $f'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0; 0)$

📺 vidéo 7.2: Dérivée partielle en coordonnées

6.6 Vecteur gradient, matrice jacobienne

Comme on l'a vu, lorsque l'on écrit un DL₁ d'une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 , en un point M l'objet qui apparaît naturellement c'est la différentielle de φ en M : $d_M \varphi$ c'est à dire une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . On sait que les applications linéaires peuvent se caractériser dans une base à l'aide de leur matrice, ici nous travaillons dans \mathbb{R}^p qui possède une base naturelle, c'est la base canonique $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, etc...

Définition 6.3 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on appelle matrice jacobienne de φ en M , la matrice de $d_M \varphi$ dans la base canonique, on la note $J_M \varphi$.

$$J_M \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(M) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(M) \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(M) \right)$$

Remarque 6.6 Si l'on note \tilde{V} le vecteur colonne coordonnées de $V \in \mathbb{R}^p$ dans la base canonique le DL₁

$$\varphi(M + V) = \varphi(M) + \underbrace{d_M \varphi(V)}_{\substack{\text{image par l'application} \\ \text{linéaire du vecteur } V}} + \|V\|\varepsilon(V)$$

où $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ s'écrit

$$\varphi(M + V) = \varphi(M) + \underbrace{J_M \varphi \tilde{V}}_{\substack{\text{produit matriciel :} \\ \text{matrice ligne fois} \\ \text{matrice colonne } V}} + \|V\|\varepsilon(V)$$

Dans les deux cas la quantité 'linéaire' est égale à

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M)v_i$$

Que l'on peut écrire comme le produit scalaire canonique du vecteur $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(M), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(M), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(M) \right)$ par le vecteur V .

Définition 6.4 On appelle gradient de φ en M le vecteur $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(M), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(M), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_p}(M)\right)$.

Remarque 6.7

$$\varphi(M + V) = \varphi(M) + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_M \varphi \cdot V}_{\substack{\text{produit scalaire} \\ \text{de deux vecteurs}}} + \|V\|\varepsilon(V)$$

fin de la semaine 6 

Chapitre 7

Fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

7.1 Objectif, méthode

Objectif : Au voisinage d'un point, nous savons approximer $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ par une application affine (constante + linéaire) à l'aide d'un DL₁, en un extremum cette application affine doit être constante (point critique). On cherche maintenant à approcher φ par une application non plus affine mais constante + linéaire + quadratique : c'est exactement ce que l'on fait pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} lorsqu'on les approche par un DL₂.

Objectif général : Les extrema

Méthode : Utiliser ce que l'on sait faire pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

7.2 Rappel cas réel

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors f possède un minimum local en a . En effet sur un voisinage $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ la fonction f'' reste strictement positive par continuité, donc f' est strictement croissante sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, donc strictement négative sur $]a - \varepsilon, 0[$ et strictement positive sur $]0, a + \varepsilon[$. On a donc f strictement décroissante sur $]a - \varepsilon, a]$ et strictement croissante sur $]a, a + \varepsilon[$. f possède un minimum local strict en a .

7.3 Dérivée partielle seconde

Soit $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles sur \mathcal{O} , ces p dérivées partielles sont elles-mêmes des fonctions de \mathcal{O} dans \mathbb{R} , se pose la question de l'existence de dérivées partielles de ces fonctions.

Définition 7.1 Si $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ possède en $P \in \mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à la i ème variable, on note cette dérivée

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(P) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_i}(P)$$

Si $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ possède en $P \in \mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à la j ème variable (avec $i \neq j$), on note cette dérivée

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}(P)$$

Si les dérivées partielles de φ , les p fonctions $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq p}$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 alors on dit que φ est de classe \mathcal{C}^2 .

Proposition 7.1 Les projections sur les axes (dx_i) sont de classe \mathcal{C}^2 .

Proposition 7.2 Soient $\varphi, \psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe \mathcal{C}^2 alors $\phi + \psi$ et $\phi\psi$ sont de classe \mathcal{C}^2 .
Si $\phi(\mathcal{O}) \subset I$, et que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors $f \circ \phi$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Preuve : Les dérivées partielles se ramènent à des dérivées normales et ensuite ce sont juste les théorèmes sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 (prop. 6.2) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x_i}(X) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X) + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(X) \\ \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i}(X) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X)\psi(X) + \varphi(X)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(X) \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(X) &= (f' \circ \varphi)(X) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X)\end{aligned}$$

Exemple 7.1 Calculer $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}(M)$ et $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}(M)$ dans le cas particulier où $\varphi(x_1, x_2) = x_1^s x_2^t$.

▢ vidéos 8.2: Dérivée

Théorème 7.1 (Schwartz) Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , $M \in \mathcal{O}$, pour tout i et j dans $\{1, 2, \dots, p\}$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(M) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}(M)$$

7.4 DL₂

▢ vidéos 8.1: DL₂ d'une fonction de deux variable

Théorème 7.2 (DL₂) Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , $M \in \mathcal{O}$, il existe alors $\varepsilon : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\lim_{X \rightarrow M} \varepsilon(X) = 0$ et pour tout $X \in \mathcal{O}$

$$\varphi(X) = \varphi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(M)(x_i - m_i)(x_j - m_j) + \|X - M\|^2 \varepsilon(X)$$

où $M = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Exemple 7.2 Écrire un DL₂ de φ en (2,1) pour $\varphi(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^3$.

Remarque 7.1 On peut écrire l'égalité précédente légèrement différemment avec $V = X - M = \overrightarrow{MX}$:

$$\forall V \in \mathbb{R}^p, M + V \in \mathcal{O} \Rightarrow \varphi(M + V) = \varphi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(M)v_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(M)v_i v_j + \|V\|^2 \varepsilon(V)$$

avec $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$.

Définition 7.2 Pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 on note $\Gamma_M \varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, et on appelle différentielle seconde de φ en M l'application de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall V = (v_1, v_2, \dots, v_p), W = (w_1, w_2, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p, d_M^2 \varphi(V, W) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(M)v_i w_j$$

Remarque 7.2 Le théorème 7.2 s'écrit alors

$$\forall X \in \mathcal{O}, \varphi(X) = \varphi(M) + d_M \varphi(X - M) + \frac{1}{2} d_M^2 \varphi(X - M, X - M) + \|X - M\|^2 \varepsilon(X)$$

à rapprocher du DL₂ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x)$$

Chapitre 8

Extrema.

8.1 Objectif, méthode

Objectif : Au voisinage d'un point, nous savons approximer une fonction de classe $\mathcal{C}^2 \varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ par la somme d'une constante, d'une forme linéaire et d'une forme quadratique à l'aide d'un DL₂.

Objectif général : Étudier les extrema d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

Méthode : Utiliser ce que l'on sait faire pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Il faut avoir en tête, la proposition 4.2 sur les extrema que l'on a déjà vu : Si une fonction φ possède un extrema en $M_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ où φ possède des dérivées partielles alors ces dérivées partielles sont nulles en M_0 .

8.2 Rappel cas réel

Pour les fonctions f de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}

- Si f est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ et possède un minimum en a alors $f'(a) = 0$.
- Si f est \mathcal{C}^2 , $a \in \overset{\circ}{I}$, $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ alors f possède un maximum local strict en a .
- Si f est \mathcal{C}^2 , $a \in \overset{\circ}{I}$, $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ alors f possède un minimum local strict en a .

8.3 Formes quadratiques

Définition 8.1 Une application $\gamma : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique si il existe des réels $a_{i,j}$ tels que

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}, \gamma(v_1, v_2, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j} v_i v_j$$

Définition 8.2 Soit γ une forme quadratique

- γ est négative si $\forall V \in \mathbb{R}^{p*}, \varphi(V) \leq 0$
- γ est positive si $\forall V \in \mathbb{R}^{p*}, \varphi(V) \geq 0$
- γ est définie négative si $\forall V \in \mathbb{R}^{p*}, \varphi(V) < 0$
- γ est définie positive si $\forall V \in \mathbb{R}^{p*}, \varphi(V) > 0$

Exemple 8.1 1. $\gamma(x, y) = x^2 + 2y^2$ est définie positive.

2. $\gamma(x, y) = 5x^2$ est positive mais pas définie positive.

3. $\gamma(x, y) = xy$ n'est ni positive, ni négative.

4. $\gamma(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy$? C'est plus difficile à étudier

8.4 Formes quadratiques en dimension deux

Étude du signe des formes quadratiques $ax^2 + bxy + y^2$.

8.5 Matrice d'une forme quadratique

A chaque forme quadratique γ est associée une matrice symétrique M telle que si V a pour matrice colonne coordonnées X dans la base canonique.

$$\gamma(V) = X^t M X$$

Or M est une matrice symétrique; il existe donc une matrice orthogonale ($P^{-1} = P^t$) telle que $D = P^{-1} M P$ soit diagonale. Il faut pour cela trouver une base orthonormale de vecteurs propres. On a alors

$$\gamma(V) = X^t M X = X^t P D P^t X = (P^t X) D (P^t X) = \sum_{i=1}^p d_i y_i^2$$

avec $Y = P^t X = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_p)^t$ et $D_{ii} = d_i$.

On peut remarquer que $\|Y\|^2 = Y^t Y = (P^t X)^t P^t X = X^t P P^t X = X^t X = \|X\|^2$

Avec ces notations on a :

- Proposition 8.1**
- $(\forall V \in \mathbb{R}^p, \varphi(V) \leq 0) \Leftrightarrow \forall i, d_i \leq 0$ (φ est négative)
 - $(\forall V \in \mathbb{R}^p, \varphi(V) \geq 0) \Leftrightarrow \forall i, d_i \geq 0$ (φ est positive)
 - $(\forall V \in \mathbb{R}^p, \varphi(V) < 0) \Leftrightarrow \forall i, d_i < 0$ (φ est définie négative)
 - $(\forall V \in \mathbb{R}^p, \varphi(V) > 0) \Leftrightarrow \forall i, d_i > 0$ (φ est définie positive)

8.6 Application aux extrema

Définition 8.3 La matrice de la différentielle seconde de φ au point M s'appelle la matrice Hessienne.

Théorème 8.1 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, de classe C^2 sur $\overset{\circ}{\Omega}$ et $M \in \overset{\circ}{\Omega}$. Notons $\gamma_M(V) = d_M^2 \varphi(V, V)$ la forme quadratique associée à la différentielle seconde de φ en M .

- $\varphi(M + V) = \varphi(M) + d_M \varphi + \frac{1}{2} \gamma_M(V) + \|V\|^2 \varepsilon(V)$
- Si φ possède un extremum local en M alors $d_M \varphi = 0$.
- Si $d_M \varphi = 0$ et γ_M est définie positive alors φ possède un minimum local strict en M .
- Si $d_M \varphi = 0$ et γ_M est définie négative alors φ possède un maximum local strict en M .
- Si φ possède un minimum local en M alors $d_M \varphi = 0$ et γ_M est positive.
- Si φ possède un maximum local en M alors $d_M \varphi = 0$ et γ_M est négative.

Preuve : On peut commencer par vérifier que pour r assez petit $B(0, r) \subset \overset{\circ}{\Omega}$. Pour le troisième point, Γ_M est définie positive. Toutes "ses" valeurs propres sont strictement positives

$\varphi(M+V) - \varphi(M) = \frac{1}{2} \Gamma_M(V) + \|V\|^2 \varepsilon(V)$ or $\Gamma_M(V) = \sum_{i=1}^p d_i y_i^2 \geq \min(d_i) \sum_{i=1}^p y_i^2 = \min(d_i) Y^t Y = \min(d_i) (P^t X)^t (P^t X) = \min(d_i) X^t P P^t X = \min(d_i) X^t X = \min(d_i) \|V\|^2$ Donc $\varphi(M + V) - \varphi(M) \geq \frac{1}{2} \min(d_i) \|V\|^2 + \|V\|^2 \varepsilon(V)$, pour V assez petit $\frac{1}{2} \min(d_i) + \varepsilon(V)$ est strictement positif, donc il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset \overset{\circ}{\Omega}$ et

$$\forall V \in B(0, r) \setminus \{0\}, \varphi(M + V) - \varphi(M) > 0$$

φ possède en M un minimum local strict.

fin de la semaine 8 

Chapitre 9

Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q

9.1 Objectif, méthode

Objectif : Nous avons étudié les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , à plusieurs reprises nous avons composé une telle fonction par p fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $\varphi(u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t))$, cette approche permet l'étude et les calculs mais les notations sont lourdes et difficile à étendre à des espaces plus généraux.

Objectif général : Étendre les résultats des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} aux fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q

9.2 Continuité

Définition 9.1 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, la fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en P si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Omega, \|X - P\| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(X) - \varphi(P)| < \varepsilon$$

Définition 9.2 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, la fonction $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ est continue en P si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Omega, \|X - P\| \leq \eta \Rightarrow \|\Phi(X) - \Phi(P)\| < \varepsilon$$

Remarque 9.1 De même on peut définir la notion de limite en un point de $\bar{\Omega}$.

Proposition 9.1 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que,

$$\forall X \in \Omega, \Phi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_q(X))$$

Φ est continue en P si et seulement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ sont continues en P .

Preuve : Les deux inégalités suivantes permettent de montrer le résultat.

$$\|\Phi(X) - \Phi(P)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^q ((\varphi_j(X) - \varphi_j(P))^2)}$$

et $|\varphi_j(X) - \varphi_j(P)| \leq \|\Phi(X) - \Phi(P)\|$.

Proposition 9.2 Soit Ω une partie de \mathbb{R}^p , $P \in \Omega$, et $\Phi, \Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ si Φ et Ψ sont continues en P alors $\Phi + \Psi$ et $\Phi\Psi$ sont continues en P .

Preuve : Il suffit de regarder coordonnées par coordonnées et d'appliquer le résultat sur les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} (proposition 5.1).

Proposition 9.3 Soit Ω_1 une partie de \mathbb{R}^p , Ω_2 une partie de \mathbb{R}^q , $P \in \Omega_1$, $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ et $\Psi : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^r$ si Φ et Ψ sont continues en P et en $\Phi(P)$ alors $\Psi \circ \Phi$ est continue en P .

Preuve : Pour démontrer cela nous pouvons utiliser la continuité séquentielle (prop 5.1) : Soit (X_n) une suite d'éléments de Ω_1 qui converge vers P , comme $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ est continue les φ_j sont continues, $(\varphi_j(X_n))$ converge vers $\varphi_j(P)$, et donc $(\Phi(X_n))$ est une suite d'éléments de Ω_2 qui converge vers $\Phi(P)$. La fonction $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ étant continue, les fonctions ψ_k sont continues et donc la suite $(\psi_k(\Phi(X_n)))$ converge vers $\psi_k(\Phi(P))$, pour chaque k la fonction $\psi_k \circ \Phi$ est continue en P et donc $\Psi \circ \Phi$ est continue en P .

9.3 Classe \mathcal{C}^1

Définition 9.3 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $P \in \mathcal{O}$, $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ possède une dérivée partielle en P si chacune des fonctions $\varphi_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ possède une dérivée partielles en P , et on pose

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(P), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_i}(P) \right)$$

Définition 9.4 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ est de classe \mathcal{C}^1 si les fonctions $\varphi_j : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 9.1 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$, de classe \mathcal{C}^1 , $M \in \mathcal{O}$, il existe alors $\varepsilon : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$ tel que $\lim_{X \rightarrow M} \|\varepsilon(X)\| = 0$ et pour tout $X \in \mathcal{O}$

$$\Phi(X) = \Phi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) + \|X - M\| \varepsilon(X)$$

où $M = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Preuve : $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$, on peut écrire un DL₁ de chacune des fonctions φ_j grâce au théorème 6.2. il existe ε_j tel que

$$\varphi_j(X) = \varphi_j(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) + \|X - M\| \varepsilon_j(X)$$

avec $\lim_{X \rightarrow M} \varepsilon_j(X) = 0$ ce qui donne si l'on regroupe les q coordonnées :

$$\Phi(X) = \Phi(M) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M)(x_i - m_i) + \|X - M\| (\varepsilon_1(X), \varepsilon_2(X), \dots, \varepsilon_q(X))$$

En posant $\varepsilon(X) = (\varepsilon_1(X), \varepsilon_2(X), \dots, \varepsilon_q(X))$ on a bien $\lim_{X \rightarrow M} \|\varepsilon(X)\| = 0$.

Définition 9.5 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$, de classe \mathcal{C}^1 , $M \in \mathcal{O}$, on définit la différentielle de Φ en M l'application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q définit par

$$\forall V = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p, d_M \Phi(V) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M) v_i = \sum_{i=1}^p \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M)}_{\substack{\text{Dérivée partielle} \\ \text{de } \Phi \text{ en } M}} \underbrace{v_i}_{\substack{\text{Le réel} \\ v_i}} \quad \text{multiplication}$$

Définition 9.6 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^p , $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^q$, de classe \mathcal{C}^1 , $M \in \mathcal{O}$, la matrice jacobienne de Φ en M est la matrice de l'application linéaire $d_M \Phi$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q .

📺 vidéos 9.1: Matrice jacobienne.

Proposition 9.4 La matrice jacobienne de Φ en M est la matrice :

$$J_M \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(M) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p}(M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_2}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p}(M) \end{pmatrix}$$

Remarque 9.2 Si on note \tilde{V} , la matrice colonne coordonnées de $V \in \mathbb{R}^p$ dans la base canonique de \mathbb{R}^p , et \tilde{W} la matrice colonne coordonnées de $d_M \Phi(V) \in \mathbb{R}^q$ dans la base canonique de \mathbb{R}^q alors $\tilde{W} = (J_M \Phi) \tilde{V}$. C'est un produit matriciel.

Exemple 9.1 Soient $\Phi(x_1, x_2) = (x_1^4 x_2^2, x_1 x_2)$, et $M = (1, 2)$ alors $d_M \Phi = (16, 2)dx_1 + (4, 1)dx_2$ et

$$J_M \Phi = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice coordonnées de V est $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a donc $J_M \Phi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16v_1 + 4v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix}$

Théorème 9.2 Soit \mathcal{O}_1 un ouvert de \mathbb{R}^p , \mathcal{O}_2 un ouvert de \mathbb{R}^q $\Phi : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$, et $\Psi : \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathbb{R}^r$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , $M \in \mathcal{O}_1$, alors $\Psi \circ \Phi$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et on a la relation

$$d_M(\Psi \circ \Phi) = d_{\Phi(M)} \Psi \circ d_M \Phi$$

qui s'écrit matriciellement

$$J_M(\Psi \circ \Phi) = J_{\Phi(M)} \Psi \cdot J_M \Phi$$

📺 **vidéo 9.2**: Différentielle d'une compo

Preuve : C'est juste écrire coordonnées par coordonnées le théorème 6.2 sur la composition. Il suffit de dériver par rapport à chacune des p variables de $\Phi(x_1, \dots, x_p) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_p), \dots, \varphi_q(x_1, \dots, x_p))$.

$$x_i \rightarrow \Psi_j \left(\varphi_1(\dots, x_i, \dots), \varphi_2(\dots, x_i, \dots), \dots, \varphi_q(\dots, x_i, \dots) \right)$$

9.4 Déformations

Soit $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour deux points A et B très proches, on a

$$\overrightarrow{\Phi(A)\Phi(B)} = \overrightarrow{\Phi(A)\Phi(A + \overrightarrow{AB})} = \Phi(A + \overrightarrow{AB}) - \Phi(A) = J_A \Phi \cdot \overrightarrow{AB}$$

On en déduit

$$\|\overrightarrow{\Phi(A)\Phi(B)}\|^2 = \|J_A \Phi \cdot \overrightarrow{AB}\|^2 = (J_A \Phi \cdot \overrightarrow{AB})^t (J_A \Phi \cdot \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}^t \cdot J_A \Phi^t \cdot J_A \Phi \cdot \overrightarrow{AB}$$

On a donc

$$\|\overrightarrow{\Phi(A)\Phi(B)}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^t \cdot (J_A \Phi^t \cdot J_A \Phi - I) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Comme $J_A \Phi^t \cdot J_A \Phi - I$ est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale $J_A \Phi^t \cdot J_A \Phi - I = P^t D P$

fin de la semaine 9 🍷

Index

\mathcal{C}^1 , 21

\mathcal{C}^2 , 26

affiche, 6

argument, 7

changement de variable, 9

Chasles, 9

classe \mathcal{C}^1 , 21

congrue, 7

conjugué, 6

continue, 19, 30

degré, 11

décomposition en éléments simples, 12

exponentielle complexe, 7

fraction rationnelle, 11

Hessienne, 29

irréductible, 11

limite, 20

linéariser, 10

module, 6

modulo, 7

partie

 imaginaire, 6

 réelle, 6

point critique, 18

Schwartz, 27

théorème

 fondamental de l'analyse, 9

video

 vidéo 1.1 : Trigonométrie, 4

 vidéo 1.2 : Complexes & trigonométrie, 6

 vidéo 2.1 : Aires et intégrales, 8

 vidéo 2.2 : Intégration par partie, 9

 vidéo 3.1 : Décomposition en éléments simples, 11

 vidéo 4.2 : Fonctions affines de 2 variables, 14

 vidéo 4.1 : Représentation des fonctions de deux variables, 15

 vidéo 5.1 : Comment dériver une fonction de deux variables ?, 17

 vidéo 5.2 : Représentation d'une fonction de deux variables, dérivées partielles, 17

 vidéo 5.3 : Continuité pour une fonction de deux variables, 20

 vidéo 6.1 : Développements limités d'ordre 1 pour les fonctions de plusieurs variables, 21

 vidéo 6.2 : Notations différentielles, 23

 vidéo 7.1 : Dérivée d'une composée d'une fonction de deux variables avec deux fonctions d'une variable, 24

 vidéo 7.2 : Dérivée partielle en coordonnées polaires, 25

 vidéo 8.2 : Dérivées partielles secondes et théorème de Schwarz, 27

 vidéo 8.1 : DL2 d'une fonction de deux variables, 27

 vidéo 9.1 : Matrice jacobienne, 31

 vidéo 9.2 : Différentielle d'une composée de fonction \mathcal{C}^1 , 32