Semaine 1 : Trigonométrie

Exercice 1: Déterminer une formule pour $\tan(x+y)$.

Exercice 2: Démontrer les formules $\cos x = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$ et $\sin x = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

Exercice 3: Résoudre les équations : $\sin x + \cos x = 0$ et $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

Exercice 4: Démontrer que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Exercice 5: Démontrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Exercice 6: Démontrer en utilisant les complexes que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

Application dans le cas ou a,b,c sont les angles d'un triangle.

Exercice 7: Dans un triangle ABC, on note a,b,c les longueurs des cotés opposés à A, B et C et p le demi périmètre du triangle.

a) Montrer la formule du cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

- Avec le produit scalaire.
- Avec des arguments de trigonométrie et le théorème de Pythagore.

b) Montrer que aire$(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

c) En déduire la formule de Héron : aire$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

d) Montrer que dans un triangle qui n'est pas rectangle on a :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Semaine 2 : Intégration 1

Exercice 8: Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} x.\sin 5x \, \mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^4 \frac{2+\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^\pi x^2\cos x\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 9: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin x$.

Exercice 10: Déterminer les primitives suivantes :

$$(I_1) : \int^x t\cos(2.t^2+1)\,\mathrm{d}t \qquad (I_2) : \int^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad (I_3) : \int^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Semaine 3 : Intégration 2

Exercice 11: Calculer les intégrales ou primitives des fractions rationnelles suivantes :

$(I_1) : \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$

$(I_2) : \displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{t^2+t-2}\,\mathrm{d}t$

$(I_3) : \displaystyle\int^x \frac{1}{t^3+3t^2-4}\,\mathrm{d}t$

$(I_4) : \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+3t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$

$(I_5) : \displaystyle\int^x \frac{8t+4\,\mathrm{d}t}{4t^2+4t+5}$

$(I_6) : \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+5}$

$(I_7) : \displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

$(I_8) : \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x+1)^2}$

Exercice 12: Calculer I + J, I - J et en déduire les valeurs de I et J :

$$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\cos^2 x \,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 13: Calculer les intégrales généralisées suivantes, lorsqu'une bornes est infinie, il suffit de faire tendre la borne vers l'infini pour avoir le résultat, ainsi par définition

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x-3}{x.(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin x\,\mathrm{d}x\ (\lambda>0) \qquad \int_1^{\infty}\frac{\ln x\ \ \mathrm{d}x}{x^2}$$

Semaine 4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 14: Soit A et B deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B) quelle est l'équation de la droite (AB), quelle est l'équation d'une droite quelconque passant par A.
Soit A, B, C trois points de l'espace de coordonnées (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B) et (x_C,y_C,z_C) quelle est l'équation du plan (ABC), quelle est l'équation d'un plan quelconque passant par A.

Exercice 15: Étudier les fonctions suivantes et préciser les éventuels extrema :

a) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}\cdot$
b) $g : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
c) $h : x \mapsto \sin(x)\,(1+\cos(x))$.
d) $k : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x) - \frac{x}{2}\cdot$

Exercice 16: Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $(x;y) \mapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$.
b) $(x;y) \mapsto \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.
c) $(x;y) \mapsto \ln(xy)$.
d) $(x;y) \mapsto x\ln(y^2-x)$.
e) $(x;y) \mapsto \sqrt{4x-x^2+2y-y^2}$.

Exercice 17:

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes et déterminer $f_i'(0)$ le cas échéant.

a) Soit f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) Soit f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si } x > 0, \\ 3\sin x - 2\cos x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

c) Soit f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_3(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 18: Une ligne de niveau d'une fonction φ définie sur un ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est par définition l'image d'une application continue $F : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in I,\ \varphi(F(t)) = c$$

a) Considérons $\varphi_1 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.
Quelle est la forme des lignes de niveau de φ_1 ?

b) Considérons $\varphi_2 : (x,y) \mapsto (x-2)^2 + y^2 + 3$.
Quelle est la forme des lignes de niveau de φ_2 ?

c) Considérons $\varphi_3 : (x,y) \mapsto (x-1)^2 + (y/2)^2$.
Quelle est la forme des lignes de niveau de φ_3 ?

Semaine 5 : Dérivées partielles

Exercice 19:
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

a) $\varphi_1(x,y) = x^2 + 2xy + 2y$.

b) $\varphi_2(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

c) $\varphi_3(x,y) = \sin(2x + 3y)$.

d) $\varphi_4(x,y) = x^y$.

e) $\varphi_5(x,y,z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$.

f) $\varphi_6(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

g) $\varphi_7(x,y) = \|(x,y)\|$.

Exercice 20:

a) Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = 1$ si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, et $\varphi(x,y) = 0$ sinon.
φ admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$?

b) Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $x \neq -y$, et $\varphi(x,y) = 0$ sinon.
φ admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$?

Exercice 21: Soit $\varphi(x,y) = \dfrac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que les dérivées partielles de φ existent en $(0,0)$.

b) Est-ce que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1)$ existe ? Est-ce que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ existe ?

Semaine 6 : Continuité, limites

Exercice 22: Soient les fonctions définies sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\varphi(x,y) = \frac{\sin x}{x+y}$ et $\psi(x,y) = x^y$.
Comparer $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x;y)\right]$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)$.

Exercice 23: Soit $\varphi(x,y) = \frac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = 0$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x;y)\right]$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,\lambda x)$.

b) Soit g la restriction de φ à la parabole d'équation $y = x + x^2$.
Quelle est la limite de g en 0 ?

c) Que peut-on en conclure quant à la limite de φ en (0,0) ?

Exercice 24: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue en 0.

b) Calculer les dérivées partielles de φ en (0,0)

c) Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de (0,0).

d) Montrer que les dérivées partielles de φ ne sont pas continues en (0,0).

Exercice 25: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue en 0.

b) Calculer les dérivées partielles de φ en (0,0)

c) Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de (0,0).

d) Montrer que les dérivées partielles de φ sont continues en (0,0).

Semaine 7 : Différentielle, DL$_1$

Exercice 26: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa différentielle au point A, ainsi que son DL$_1$ en A.

a) $\varphi_1(x,y) = \ln(x+y)$, $A = (0,1)$.

b) $\varphi_2(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$, $A = (1,2)$.

c) $\varphi_3(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ $A = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\varphi(1;3) = 0$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(1;3) = 2$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(1;3) = 1$

a) φ possède-t-elle un extremum local en $(1;3)$?

b) Écrire un DL$_1$ de φ en (1 ;3).

c) Donner une valeur approchée de $\varphi(1{,}1; 2{,}9)$

d) On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi(5-2t, t^2-1)$, calculer $f'(1)$.

Semaine 8 : Composition

Exercice 27:
Soit Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\Phi(u,v) = (u^2+v^2,uv)$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, déterminer les dérivées partielles de $\psi \circ \Phi$.

Exercice 28: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \varphi(\mathrm{e}^t + t, t^2 - 3t)$. Calculer la dérivée de f.

Exercice 29: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et h l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \varphi(x,x)$. Calculer la dérivée de h en fonction des dérivées partielles de φ.

Exercice 30:
Trouver toutes les applications $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x^3 + y.$$

Exercice 31: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = \varphi(tx,ty)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
b) On suppose désormais que $\varphi(tx,ty) = t\varphi(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.
   i) Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx,ty)y$.
   ii) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x,y) = \alpha x + \beta y$.

Semaine 9 : Dérivées partielles secondes

Exercice 32:
Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $\varphi_1(x,y) = x^2(x+y)$.
b) $\varphi_2(x,y) = e^{xy}$.

Exercice 33: Écrire le DL_2 de φ_i au voisinage du point M_i.

a) $\varphi_1(x,y) = \sin x \sin y$ et $M_1 = (0;0)$.
b) $\varphi_2(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ et $M_2 = (e^{-1};0)$.
c) $\varphi_3(x,y) = e^{xy}$ et $M_3 = (0;1)$.

Exercice 34: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(0;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0;1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0;1) = 3 \text{ et } \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0;1) = 2$$

a) Écrire un DL_2 de φ en $(0;1)$.
b) On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi(t,e^t)$, calculer $f'(t)$, puis $f''(t)$, en fonction des dérivées partielles de φ.
c) Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$, montrer que f possède un extremum local en 0 ?

Exercice 35: Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$.
On dit que φ est homogène de degré r si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \varphi(tx,ty) = t^r \varphi(x,y).$$

a) Montrer que si φ est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.

b) Montrer que si φ est homogène de degré r alors :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = r\varphi(x,y).$$

c) Montrer que si φ est homogène de degré r et $\mathcal{C}^2$, Montrer que :
$$x^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = r(r-1)\varphi(x,y).$$

Semaine 10 : Extrema

Exercice 36:
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la matrice hessienne et en déduire la nature du point critique donné :

a) $\varphi_1(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$ au point critique $(0,0,0)$.

b) $\varphi_2(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + 3xy$ au point critique $(0,0)$.

c) $\varphi_3(x,y) = x^y$ au point critique $(1,0)$.

d) $\varphi_4(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$ au point critique $(-2,-2,-2)$.

Exercice 37: Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des maxima/minima locaux ou des points selles :

a) $\varphi_1(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$.

b) $\varphi_2(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$.

c) $\varphi_3(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$.

Exercice 38: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :
$\varphi(x,y) = g(x) + h(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que si g admet un maximum global en x_0 et h admet un maximum global en y_0, alors φ admet un maximum global en (x_0, y_0).

b) Déduire de la question précédente les maxima globaux de $\varphi(x,y) = x^4 + 4x + y^2 - 2x$.

c) Montrer que si g admet un maximum local en x_0 et h admet un maximum local en y_0, alors φ admet un maximum local en (x_0, y_0).

d) **Bonus** Que dire de φ en un point (x_0, y_0) tel que g admet un maximum local strict en x_0 et h admet un minimum local strict en y_0 ?

e) Que dire dans le cas où $\varphi(x,y) = g(x)h(y)$ avec $g,h > 0$, puis le cas $g > 0, h < 0$

Exercice 39:
Sur le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 2y + z = 15$, déterminer le point le plus proche de l'origine.

Exercice 40: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(0;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0;1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0;1) = 3 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0;1) = 2$$

a) Écrire la Hessienne de φ en $(0;1)$, déterminer sa signature.

b) φ possède-t-elle un extremum local en $(0\,;1)$?

Semaine 11 : Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

Exercice 41: Justifier que les applications suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire leur matrice jacobienne en un point donné.

a) $(x, y) \to \sin(x^2 - y^2)$
b) $(x, y) \to (x + y, x - y)$
c) $(x, y, z) \to (xy^2, x^2 e^{y+z}, \sin x)$
d) $(x, y, z) \to (x + y^2, xyz^2)$
e) $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin(x)\sin(y)\right)$.
f) $f(x,y,z) = (xy, yz, zx)$.
g) $f(x,y) = (y\sin(x), \cos(x))$.

Exercice 42:
On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \left(\sin(xy), \cos x, e^{y^2}\right) \text{ et } g(u, v, w) = uvw.$$

a) Calculer explicitement $g \circ f$.
b) En utilisant la question 1., calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
c) Déterminer les matrices jacobiennes $M_f(x, y)$ et $M_g(u, v, w)$ de f et de g.
d) Retrouver le résultat de 2. en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 43: Jacobien : interprétation...