



Analyse 3 cours de L2

Parcours maths, double licence et CUPGE

24 mai 2024

Alexandre MIZRAHI
CY Tech

Table des matières

1	Rappels sur les suites de réels	4
1.1	Suites extraites	4
2	Espace vectoriel normé	5
2.1	Norme	5
2.2	Boules et voisinages dans un espace vectoriel normé	5
2.3	Fermés, adhérence	7
3	Suites dans un espace vectoriel normé	8
3.1	Propriétés algébriques des suites convergentes	9
4	Fonction définie d'un EVN à valeur dans un EVN	10
5	Continuité	11
6	Compacité	12
7	Cas de la dimension finie.	13
8	Convergence uniforme des suites de fonctions réelles	14
8.1	Convergence simple	14
8.2	Convergence uniforme	15
8.3	Continuité et convergence uniforme	16
9	Convergence uniforme, intégrale et dérivée	16
9.1	Intégrale de la limite	16
9.2	Dérivabilité de la limite	17
10	Série de fonctions, convergence uniforme et convergence normale	18
11	Systèmes différentiels linéaire à coefficients constants	19
11.1	Cas diagonalisable dans \mathbb{R} sans second membre.	19
11.2	Cas diagonalisable dans \mathbb{R} avec second membre.	19
11.3	Cas diagonalisable dans \mathbb{C} sans second membre.	19
11.4	Cas des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.	19
12	Systèmes différentiels linéaires : résultats généraux	19
12.1	Théorème de Cauchy linéaire	19
13	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants d'ordre 1 sans second membres en dimension 2, forme des solutions	20
14	Exponentielle de matrice	22
14.1	Intro	22
14.2	Normes multiplicative sur les matrices	22
14.3	CNS de convergences d'une suite de matrice	22
14.4	Définition de l'exponentielle de matrice	23
14.5	Dérivée de $t \mapsto e^{tM}$	23
14.6	Solutions des systèmes $Y' = AY$	24
14.7	Solutions des systèmes $Y' = AY + B$	24
14.8	Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable.	24
14.9	Calcul de l'exponentielle d'une matrice 2×2 diagonalisable dans \mathbb{C}	24
15	Compléments de topologie	25
15.1	Théorème de Heine	25
15.2	Complétude	25
16	Théorème du point fixe	26

Présentation de l'organisation de l'unité d'enseignement

Cette unité d'enseignement est organisée sous forme de classe inversée, de la façon suivante :

Pour chacune des 9 premières semaines d'enseignement (de la semaine 2 à la semaine 10)

- 1) Elle commence par un travail personnel
 - Visionner 4 vidéos sur la vidéothèque
 - ★ 2 présentations de la semaine n
 - ★ 2 démonstrations de la semaine $n - 1$.
 - Lire le chapitre du poly de la semaine n
 - Apprendre la démonstration de la semaine $n - 1$ de son groupe et travailler la démonstration à critiquer.
- 2) Elle se poursuit par un travail en CM
 - 30 minutes : 2 démonstrations sur le cours de la semaine précédente sous forme de jeu de rôle : voir plus bas
 - 45 minutes : Présentation du cours de la semaine n par l'enseignant, questions des étudiants sur le cours.
 - 15 minutes : Remémoration - Évaluation
- 3) Elle se continue par un travail classique de résolution d'exercices en TD
 - On cherche les exercices durant la séance.
 - On pose des questions à l'enseignant.

La classe est coupée en deux groupes A et B , chaque semaine avant l'amphi les étudiants du groupe A préparent une démonstration D_A de la semaine $n - 1$ et des questions sur la démonstration D_B , quant aux étudiants du groupe B ils préparent la démonstration D_B et des questions sur la démonstration D_A .

Lors du cours en amphi un étudiant du groupe A vient présenter la démonstration D_A il est épaulé d'un assistant du même groupe qui peut l'aider au besoin, un étudiant du groupe B lui pose des questions sur la preuve et le critique avec bienveillance.

Lorsque la démonstration D_A est terminée on recommence avec 3 autres étudiants pour la démonstration D_B .

Trois devoirs maison de recherche d'exemples sont à rendre en TD. Les énoncés des exemples à trouver se trouvent dans le poly de cours au fur et à mesure des définitions et propositions. La notation tiendra compte de l'originalité des exemples, un exemple qui se trouve dans une seule copie rapportera plus de points qu'un même exemple se trouvant dans 5 copies différentes. N'hésitez pas à faire des dessins pour présenter vos exemples, il n'est pas demandé de justification rigoureuse que vos exemples répondent à la question, en revanche il faut faire sentir au correcteur que vous avez compris pourquoi l'exemple fonctionne.

L'évaluation de CC de cette UE est constituée de quatre éléments :

- Note de remémoration et d'évaluation de fin d'amphi.
- Note des DM d'exemples. Il y a 3 devoirs maison à rendre à votre chargé de TD, durant le semestre.
- Note d'oral des démonstrations D_A et D_B .
- Note d'oral sur les critiques bienveillantes des démonstrations D_A et D_B .

La note de l'UE est calculée de la façon suivante $\max((2E + CC)/3; 0.9E + 0.1CC)$.

1 Rappels sur les suites de réels

On rappelle une propriété de l'ensemble des réels : toute partie non vide majorée A possède une borne supérieure c'est à dire un plus petit majorant.

Définition 1.1 1) On dit qu'une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsqu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

 **vidéo 1.2:** Autours de la définition de limite d'une suite réelle.

Proposition 1.1 Toute partie non vide majorée A de \mathbb{R} possède une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant. Autrement dit l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément que l'on appelle la borne supérieure de A et que l'on note $\sup A$.

Proposition 1.2 Toute suite croissante majorée converge vers la borne supérieure de l'ensemble

$$A = \{u_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N}\}$$




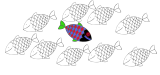
Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 1: Donner un exemple de suite réelle qui n'est pas bornée et qui n'est pas monotone.

1.1 Suites extraites

Définition 1.2 Soit (u_n) une suite de réels, on appelle suite extraite ou sous-suite de (u_n) , une suite (v_n) telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout entier n , $v_n = u_{\varphi(n)}$. On appelle parfois une telle fonction φ une extractrice.

 **vidéo 1.2:** Définition d'une sous suite réelle.



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 2: Donner un exemple de suite réelle qui diverge et qui possède une sous suite qui converge vers 2.

Proposition 1.3 Soit (u_n) une suite de réels qui tend vers l alors toute sous-suite de (u_n) tend vers l .

 **vidéo 2.1 (\mathcal{D}_A):** Sous suite d'une suite convergente.

Proposition 1.4 Toute sous-suite d'une suite (u_n) est une sous-suite de (u_n) .

Proposition 1.5 Toute suite de réels possède une sous suite monotone.

 **vidéo 2.2 (\mathcal{D}_B):** Toute suite de réel

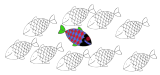
Preuve : Soit (u_n) une suite de réels, montrons qu'elle possède une sous suite monotone.

On dit qu'un entier n a "vue sur la mer" si : $\forall p > n, x_n > x_p$. (On peut visualiser cela par x_n la hauteur de n , et n a "vue sur la mer" si il est plus haut que tous les entiers qui viennent après lui). On dit que n a "la vue bouchée" si : $\exists p > n, x_p \geq x_n$. (Il existe un entier p supérieur à n et situé plus haut que lui). Il y a deux cas :

1) Ou bien il y a une infinité d'entiers I ayant vue sur la mer. Dans ce cas, en prenant pour φ une fonction croissante à valeur dans I , la suite $(x_{\varphi(n)})$ est décroissante.

2) Ou bien il n'y a qu'un nombre fini d'entiers ayant vue sur la mer. On se place au-delà de ce nombre fini, tous les termes ont la vue bouchée. On en choisit un d'indice n_0 . Il existe un indice $n_1 > n_0$ tel que $x_{n_1} \geq x_{n_0}$ puis $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \geq x_{n_1}$, etc... On construit ainsi par récurrence une sous-suite croissante.

Dans les deux cas nous avons trouvé une sous suite de (x_n) qui est monotone.



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 3: Donner un exemple de suite réelle (u_n) telle que les entiers pairs ont vu sur la mer et les entiers impaires ont la vue bouchée.

Théorème 1.1 Toute suite bornée de réels possède une sous suite convergente.

Preuve : Soit (u_n) une suite bornée de réels, d'après la proposition précédente elle possède une sous suite monotone $(x_{\varphi(n)})$, comme cette sous suite est monotone et bornée elle est convergente. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$ et la limite de $(u_{\varphi(n)})$ est dans $[a, b]$.

Définition 1.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une sous suite de (u_n) qui converge vers a .

fin de la semaine 1 


2 Espace vectoriel normé

2.1 Norme

Définition 2.1 On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- (ii) $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 2.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé; on appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \|x - y\|$.

 *vidéo 2.3: définition d'une norme et d'une distance associée*



Recherche d'exemples pour
la semaine du 5 février

N° 4: Donner un exemple de norme N sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x non nul on ait $N(x) < |x|$.

Proposition 2.1 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée à $\|\cdot\|$

On a :

- 1) $\forall (x, y) \in E^2, d(y, x) = d(x, y)$
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, (d(x, y) = 0 \iff x = y)$
- 3) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- 4) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$
- 5) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$.
- 6) $\forall (x, y) \in E^2, |||x| - |y|| \leq \|x - y\|$

Preuve : Les 5 premières sont immédiates à montrer, pour la dernière on peut utiliser le 3) pour montrer que $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, on en déduit que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, de même pour $\|y\| - \|x\|$.

2.2 Boules et voisinages dans un espace vectoriel normé

Définition 2.3 Soient $a \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$; on définit les parties suivantes de E , appelées respectivement boule ouverte, boule fermée, de centre a et de rayon r :

$$B(a; r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$$

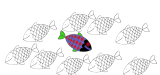
$$\overline{B}(a; r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}$$

Remarque 2.1 Lorsque l'on change de norme les boules changent, ce qui est une boule pour une norme n'est plus une boule pour une autre norme.

Définition 2.4 Une partie A de E est dite bornée lorsque :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \|x\| \leq C$$

Soit X un ensemble, $f : X \rightarrow E$ une application; on dit que f est bornée lorsque $f(X)$ est une partie bornée de E .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 5 février

N° 5: Donner un exemple de fonction $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f n'est ni minorée, ni majorée.

Remarque 2.2 Lorsque l'on change de norme les parties bornées changent; une partie peut être bornée pour une norme et non bornée pour une autre norme.

Définition 2.5 Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un même espace vectoriel E sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que :

$$\forall x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

Proposition 2.2 La relation : "être équivalente" pour les normes sur un espace vectoriel E est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive)

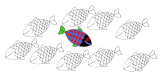
Proposition 2.3 Deux normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées.

Proposition 2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_1, \dots, A_n des parties bornées de E ; $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est bornée.

Preuve : Si $\forall x \in A_i, \|x\| \leq C_i$ alors $\forall x \in \bigcup_{i=1}^n A_i, \|x\| \leq \max(C_1, C_2, \dots, C_n)$

Définition 2.6 Soient $a \in E, V \in \mathcal{P}(E)$; on dit que V est un voisinage de a (dans E) lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a; r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a (dans E).



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 6: Donner un exemple de voisinage dans \mathbb{R}^2 de $(0; 0)$ qui n'est pas borné et qui ne contient aucun élément de norme 1.

vidéo 2.4: Notion de voisinage

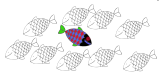
Proposition 2.5 Soit $a \in E$.

- 1) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), a \in V$
- 2) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \forall W \in \mathcal{P}(E), (V \subset W \implies W \in \mathcal{V}_E(a))$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_E(a), \bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}_E(a)$.

Ce qui revient à

- 1) a appartient à tout voisinage de a .
- 2) si W contient un voisinage de a , W est un voisinage de a .
- 3) une intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a .

Preuve : Aucune difficulté, on prend la définition de voisinage de a . pour la dernière si $B(a, r_i) \subset V_i$ alors en posant $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$ on a bien $B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$



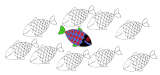
Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 7: Donner un exemple de voisinage de $(1; 2)$ dans \mathbb{R}^2 qui n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2

Définition 2.7 Une partie Ω de E est dite ouverte dans E , ou Ω est un ouvert de E lorsque :

$$\forall x \in \Omega, \exists r > 0, B(x, r) \subset \Omega$$

ce qui revient à dire que Ω est un voisinage de chacun de ses points : $\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}_E(x)$



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 8: Donner un exemple d'une suite de voisinage de 1 $(W_n)_n$ dans \mathbb{R} , dont l'intersection $\bigcap_n W_n$ n'est pas un voisinage de 1.

Proposition 2.6 Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, $B(a, r)$ est un ouvert de E .

vidéo 3.1 (\mathcal{D}_B) : \mathcal{D}_E

Proposition 2.7 (i) \emptyset et E sont des ouverts de E .

- (ii) Pour tout ensemble I et toute famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E , $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E
- (iii) Pour tout n de \mathbb{N}^* et tous ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ de E , $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ est un ouvert de E .

vidéo 3.2 (\mathcal{D}_A) : Une réunion d'ouvert

fin de la semaine 2 

Proposition 2.8 Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un même espace vectoriel E , $A \subset E$ est un ouvert pour la norme N_1 si et seulement si c'est un ouvert pour la norme N_2 .

Preuve :

Définition 2.8 Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On appelle intérieur de A , et on note $\overset{\circ}{A} = \{x \in E / \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}$
Les éléments de $\overset{\circ}{A}$ sont appelées les points intérieurs à A .

 vidéo 3.3: Notion d'intérieur

Proposition 2.9 l'intérieur de A , $\overset{\circ}{A}$, est la réunion des parties ouvertes de E incluses dans A :

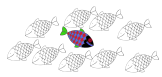
$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\Omega \\ \text{ouvert de} \\ \Omega \subset A}} \Omega$$

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand (pour l'inclusion) ouvert contenu dans A .

 vidéo 4.1 (\mathcal{D}_A): $\overset{\circ}{A}$ e A

Proposition 2.10 Pour toutes parties A, B de E

- 1) $\overset{\circ}{A} \subset A$
- 2) A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.
- 3) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
- 4) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 9: Donner un exemple dans \mathbb{R}^2 de deux parties A et B telles que $\overset{\circ}{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$

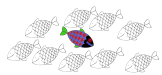
2.3 Fermés, adhérence

Définition 2.9 Une partie F de E est dite fermée dans E (ou un fermé de E) lorsque $E \setminus F$ est une partie ouverte de E .

Exemple 2.1 La boule $\overline{B}(a; r)$ et la sphère $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| = r\}$ sont des fermés de $(E, \|\cdot\|)$.

En effet si $x \notin \mathcal{S}(a, r)$, $\|x - a\| \neq r$, alors $B(x, \left| \|x - a\| - r \right|) \cap \mathcal{S}(a, r) = \emptyset$, pour le montrer considérons un $y \in B(x, \left| \|x - a\| - r \right|) \cap \mathcal{S}(a, r)$

- Si $\|x - a\| > r$ alors $\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| < \|x - a\| - r + r$, absurde.
- Si $\|x - a\| < r$ alors $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r - \|x - a\| + \|x - a\| < r$, absurde.



Recherche d'exemples pour la semaine du 5 février

N° 10: Donner un exemple dans \mathbb{R}^2 d'une partie P telle que : $\emptyset \neq \overset{\circ}{P}$ et $\overset{\circ}{P} \neq P$ et $P \neq \overline{P}$ et $\overline{P} \neq \mathbb{R}^2$.

 vidéo 3.4: Notion d'adhérence

Proposition 2.11 (i) \emptyset et E sont des fermés de E .

(ii) Pour tout ensemble I et toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E , $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E .

(iii) Pour tout n de \mathbb{N}^* et tous fermés F_1, \dots, F_n de E , $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé de E .

Définition 2.10 On appelle adhérence de A , et on note $\overline{A} = \{x \in E / \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$,

Proposition 2.12 \bar{A} est l'intersection des parties fermées de E qui contiennent A , c'est le plus petit (pour l'inclusion) fermé qui contient A .

📺 vidéo 4.2 (\mathcal{D}_B): \bar{A} et A

Proposition 2.13 Pour toutes parties A, B de E

- 1) $A \subset \bar{A}$
- 2) A est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.
- 3) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
- 4) $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$

Exercice 1 : Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Définition 2.11 Une partie A de E est dite dense dans E lorsque $\bar{A} = E$.

Proposition 2.14 Soient $x \in E$ et A une partie non vide de E ; on définit la distance entre x et A par $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R}^+ / a \in A\}$, on a alors

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$$

Preuve : soit $x \in \bar{A}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$, donc $0 \leq d(x, A) \leq d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$, en faisant tendre n vers l'infini on obtient $d(x, A) = 0$.

Soit $x \in E$ tel que $d(x, A) = 0$, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, ε n'est pas un minorant de l'ensemble $\{d(x, a) \in \mathbb{R}^+ / a \in A\}$, donc il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$ et donc $a \in B(x, \varepsilon)$ donc $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, donc $a \in \bar{A}$.

fin de la semaine 3 

3 Suites dans un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d la distance associée à $\|\cdot\|$

Une suite de E est une application de \mathbb{N} dans E , notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq 0}$, ou $(u_n)_n$).

- Définition 3.1**
- 1) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers un élément l de E lorsque la suite de réels $(\|u_n - l\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - 2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge (dans E) lorsqu'il existe $l \in E$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l
 - 3) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E diverge lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

📺 vidéo 4.3 : Suite

Remarque 3.1 Ces définitions prolongent les définitions de convergence des suites réelles en prenant pour norme sur \mathbb{R} la valeur absolue.

Proposition 3.1 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si

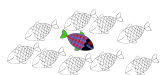
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \varepsilon)$$

De même $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge si et seulement si

$$\forall l \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geq N \\ d(u_n, l) > \varepsilon \end{cases}$$

Proposition 3.2 Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers l_1 et converge vers l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Exercice 2 : Attention une suite peut converger pour une norme et diverger pour une autre norme, mais cela n'arrive pas pour des normes équivalentes.



Recherche d'exemples pour la semaine du 11 mars

N° 11: Donner un exemple (M_n) de suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui converge pour une norme que l'on précisera vers la matrice non inversible $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3.1 Propriétés algébriques des suites convergentes

Proposition 3.3 Toute suite convergente est bornée.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, $l, l' \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

On a :

- 1) $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|l\|$
- 2) $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
- 3) $\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l' \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l + l'$
- 4) $\left. \begin{array}{l} \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ (v_n)_n \text{ bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
- 5) $\left. \begin{array}{l} (\lambda_n)_n \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
- 6) $\left. \begin{array}{l} \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l' \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda l'.$



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 12: Donner un exemple de deux suites de matrices 2×2 : (L_n) et (M_n) et d'une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\|L_n\| = n$ et $\|M_n - L_n\| = \frac{1}{n}$.

Proposition 3.4 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E, A \in \mathcal{P}(E)$. Pour que $x \in \bar{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

▣ vidéos 5.1 (\mathcal{D}_B): \mathcal{C}/\mathcal{Q} à l'aide de suite $x \in \bar{A}$

Proposition 3.5 Une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans $(E, \|\cdot\|)$, a sa limite dans A .

▣ vidéos 5.2 (\mathcal{D}_A): \mathcal{C}/\mathcal{Q} à l'aide de suite

Proposition 3.6 L'adhérence de la boule ouverte $\{x \in E/d(a, x) < r\}$ est la boule fermée $\{x \in E/d(a, x) \leq r\}$ ce qui justifie la notation $\bar{B}(a, r) = \{x \in E/d(a, x) \leq r\}$.

Preuve : On montre que $\{x \in E/d(a, x) \leq r\}$ est un fermé qui contient $B(a, r)$, donc $\bar{B}(a, r) \subset \{x \in E/d(a, x) \leq r\}$

Soit (x_n) une suite convergente de E tq $\forall n \in \mathbb{N}, d(a, x_n) \leq 1$, on a alors

$$d(a, \lim x_n) \leq d(a, x_m) + d(x_m, \lim x_n) \leq 1 + d(x_m, \lim x_n)$$

Définition 3.2 Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Proposition 3.7 Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(E, \|\cdot\|)$ si (u_n) converge vers un élément l de E , alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

Exercice 3 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $(E, \|\cdot\|)$, $l \in E$. Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il faut et il suffit que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers l .

Définition 3.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $(E, \|\cdot\|)$, et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une sous suite de (u_n) qui converge vers a .

▣ vidéos 4.4: Valeur d'adhérence

fin de la semaine 4

4 Fonction définie d'un EVN à valeur dans un EVN

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Soient $X \in \mathcal{P}(E), a \in \bar{X}, l \in F \quad f : X \longrightarrow F$

Définition 4.1 On dit que f admet l pour limite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (d_E(x, a) \leq \eta \implies d_F(f(x), l) \leq \varepsilon),$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

 **vidéo 5.3:** Définition de la notion de limite pour une fonction d'un EVN dans un EVN

Si X' est une partie de X , et $a \in \bar{X}'$ on note $f|_{X'}$ la restriction de f à X' et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X'}} f(x) = l$ pour

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{X'}(x) = l$$

Remarque 4.1 Cette définition prolonge la définition que l'on a déjà vu dans les cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 13: Donner un exemple $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée qui n'a pas de limite en 0. Puis $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante qui n'a pas de limite en 0.

Remarque 4.2 Cette définition est locale dans le sens où les propositions suivantes sont équivalentes :

- f admet l pour limite en a
- il existe un voisinage V de a telle que la restriction de f à $V : f|_V$ admet l pour limite en a
- Pour tout voisinage V de a la restriction de f à $V : f|_V$ admet l pour limite en a

Proposition 4.1 Si f admet l_1 et l_2 comme limites en a , alors $l_1 = l_2$.

Proposition 4.2 Si $f : X \longrightarrow F$ admet une limite finie en $a (a \in \bar{X})$, alors f est bornée au voisinage de a , c'est-à-dire :

$$\exists r > 0, \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, x \in B(a, r) \implies \|f(x)\|_F \leq C.$$

Proposition 4.3 Pour que $f : X \longrightarrow F$ admette l pour limite en $a (a \in \bar{X})$, il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

Théorème 4.1 (Théorème des gendarmes) Soient $X \in \mathcal{P}(E), a \in \bar{X}, f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ et } h \text{ admettent } l \text{ pour limite en } a \\ \exists r > 0, \forall x \in X, x \in B(a, r) \implies f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right.$
alors g admet l pour limite en a .

Théorème 4.2 (Composition des limites) Soient E, F, G trois espace vectoriel normé, $X \in \mathcal{P}(E), Y \in \mathcal{P}(F), a \in \bar{X}, b \in \bar{Y}$,

$f : X \rightarrow F, g : Y \rightarrow G$ telles que $f(X) \subset Y, l \in G$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet } b \text{ pour limite en } a \\ g \text{ admet } l \text{ pour limite en } b \end{array} \right.$, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a .

Proposition 4.4 Soient $X \in \mathcal{P}(E), a \in \bar{X}, f, g : X \rightarrow F, \lambda : X \rightarrow \mathbb{R}, l, l' \in F, \alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

- 1) $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \implies \|f(x)\|_F \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \|l\|$
- 2) $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0 \iff \|f(x)\|_F \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$
- 3) $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \\ g \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l' \end{array} \right\} \implies f + g \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l + l'$
- 4) $\left. \begin{array}{l} \lambda \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{array} \right\} \implies \lambda g \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$

$$5) \left. \begin{array}{l} \lambda \text{ bornée au voisinage de } a \\ g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$6) \left. \begin{array}{l} \lambda \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \\ g \xrightarrow{x \rightarrow a} l' \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda g \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha l'$$

5 Continuité

Définition 5.1 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $a \in X$. On dit que f est continue en a lorsque

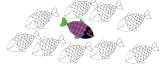
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (d_E(x, a) \leq \eta \implies d_F(f(x), f(a)) \leq \varepsilon).$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad x \in B(a, \eta) \implies f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

On dit que f est discontinue en a lorsque f n'est pas continue en a .

 **vidéo 5.4:** Lien entre continuité et limite dans un $\mathbb{E}\mathbb{U}\mathbb{N}^0$



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 14: Donner un exemple (P_n) de polynômes tel que $\deg(P_n) = n$ et (P_n) converge vers $(1 + X)^2$ pour une norme que l'on précisera.

Proposition 5.1 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $a \in X$. Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que f admette une limite en a . Dans ce cas cette limite est $f(a)$.

Proposition 5.2 Si f est continue en a , alors f est bornée au voisinage de a , c'est à dire qu'il existe un voisinage de a sur lequel f est bornée.

Proposition 5.3 Pour que $f : X \rightarrow F$ soit continue en a ($a \in X$), il faut et il suffit que : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$.

 **vidéo 6.1 (\mathcal{D}_B):** Continuité séquentielle

Proposition 5.4 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $A \subset X$, $a \in A$. Si f est continue en a , alors $f|_A$ est continue en a .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 15: Donner un exemple de fonction discontinue $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ et $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ telles que $A \cup B = \mathbb{R}$, et $f|_A$ et $f|_B$ sont continues.

Définition 5.2 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$. On dit que f est continue (ou : continue sur X) lorsque f est continue en tout point de X .

On note $C(X, F)$ (ou $C^0(X, F)$) l'ensemble des applications continues de X dans F .

Proposition 5.5 La fonction $\left. \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_E \end{array} \right\}$ est continue.



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 16: Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\cdot - 1; 1) = [0; 1]$

Proposition 5.6 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue
- (ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E .
- (iii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 11 mars

N° 17: Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\mathbb{R}) = [0; 1]$

Remarque 5.1 Attention si f n'est définie que sur une partie de E , le résultat est plus compliqué.

📺 vidéo 6.2 (\mathcal{D}_A): Continuité et image réciproque d'ouvert

Proposition 5.7 I Soient $X \in \mathcal{P}(E), a \in X, f, g : X \rightarrow F, \lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$. On a :

- 1) Si f et g sont continues en a , alors $f + g$ est continue en a
- 2) Si λ et f sont continues en a , alors λf est continue en a
- 3) Si f et g sont continues sur X , alors $f + g$ est continue sur X
- 4) Si λ et f sont continues sur X , alors λf est continue sur X

Proposition 5.8 Soient E, F, G , trois espace vectoriel normé, $X \in \mathcal{P}(E), Y \in \mathcal{P}(F), f : X \rightarrow F, g : Y \rightarrow G$ telles que $f(X) \subset Y$; on note $g \circ f : X \rightarrow G$, définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- 1) Soit $a \in X$. Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{cases}$, alors $g \circ f$ est continue en a .
- 2) Si f est continue et si g est continue, alors $g \circ f$ est continue.

fin de la semaine 5 

6 Compacité

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d la distance associée.

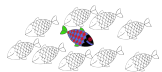
Définition 6.1 Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On dit que X est une partie compacte (ou : un compact) de E lorsque toute suite d'éléments de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X .

📺 vidéo 6.3: Définition de compact.

Exemple 6.1 Les segments de \mathbb{R} (intervalle de la forme $[a; b]$) sont des compacts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Proposition 6.1 Toute partie compacte de E est fermée bornée dans E .

📺 vidéo 7.1 (\mathcal{D}_A): Toute partie compacte de E est E .



Recherche d'exemples pour la semaine du 11 mars

N° 18: Une partie A de \mathbb{R} qui est bornée et qui n'est pas compacte, une partie B de \mathbb{R} qui est fermée dans \mathbb{R} et qui n'est pas compacte, une partie C de \mathbb{R} qui possède un maximum et un minimum mais qui n'est pas un compacte.

Proposition 6.2 Soit Y une partie compacte de E . On a, pour toute partie X de Y :

$$X \text{ fermé de } E \iff X \text{ compact}$$

📺 vidéo 6.4 : Maximum ou borne supérieure quelle différence ?


Proposition 6.3 Un compact non vide de \mathbb{R} possède un maximum et un minimum.

Preuve : Soit K un compact non vide de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, K est majoré car les compacts sont des parties bornées, K possède donc une borne supérieure $M = \sup K \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ tel que $x_n \geq M - \frac{1}{n}$, car $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de K , on a donc $M - \frac{1}{n} \leq x_n \leq M$. La suite (x_n) converge donc vers M , comme K est fermé cette limite appartient à K , donc $M \in K$.

Théorème 6.1 Soient $X \in \mathcal{P}(E), F$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, $f : X \rightarrow F$ une application.

$$\text{On a : } \begin{cases} X \text{ compact} \\ f \text{ continue} \end{cases} \implies f(X) \text{ compact.}$$

Preuve : Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(K)$, montrons qu'elle possède bien une sous-suite convergente. Pour tout n , $y_n \in f(K)$, il existe donc $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Comme K est compact, (x_n) possède une sous suite convergente dans K , il existe φ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un élément $l \in K$. Or f est continue en l donc la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge vers $f(l)$ qui appartient à $f(K)$. La suite $(y_{\varphi(n)})_n$ est donc une sous suite convergente de la suite (y_n) .

 **vidéo 7.2 (\mathcal{D}_B):** L'image par une application continue d'un compact e

Proposition 6.4 Soient X une partie non vide de E et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si X est compacte et f continue, alors f est bornée et atteint ses bornes

fin de la semaine 6 

7 Cas de la dimension finie.

 **vidéo 7.3:** Un exemple d'e

 **vidéo 7.4:** Un exemple de suite de suite

Lemme 1 Soit (E, \cdot) un espace vectoriel de dimension fini, il existe une norme $\| \cdot \|$ de E pour laquelle les compacts de $(E, \| \cdot \|)$ sont les fermés bornés de $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Preuve : Soit (e_1, e_2, \dots, e_d) une base de E , posons $\| \sum_{i=1}^d x_i^\circledast e_i \|_\infty = \max(|x_1^\circledast|, |x_2^\circledast|, \dots, |x_d^\circledast|)$ On vérifie que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E .

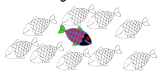
Soit K un ensemble borné et fermé de E , et (u_n) une suite d'éléments de E . Pour chaque n on peut écrire le vecteur u_n dans la base (e_1, e_2, \dots, e_d) :

$$u_n = \sum_{i=1}^d x_n^\circledast e_i$$

La suite $(x_n^\circledast)_n$ est une suite de réels, c'est la suite de la première coordonnée des u_n dans la base (e_1, e_2, \dots, e_d) . Comme $|x_n^\circledast| \leq \|u_n\|_\infty$, cette suite est une suite bornée, on peut donc lui appliquer le théorème de Bolzano Weierstrass, il existe une sous suite convergente. Soit φ_1 une extractrice la suite $(x_{\varphi_1(n)}^\circledast)_n$ est donc une suite convergente vers un réel l_1 . La suite $(x_{\varphi_1(n)}^\circledast)_n$ est une suite bornée de réels elle possède donc une sous suite convergente, soit φ_2 une extractrice, la suite $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^\circledast)_n$ est une suite convergente vers un réel l_2 , on peut remarquer que $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^\circledast)_n$ est une suite qui converge vers l_1 . Et ainsi de suite avec chaque suite coordonnées on obtient $(x_{\varphi_1(\varphi_2(\dots(\varphi_d(n))\dots)}^\circledast)_n$ est une suite qui converge vers l_d . Pour simplifier l'écriture notons $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d$ pour tout k compris entre 1 et d la suite $(x_{\varphi(n)}^\circledast)_n$ converge vers l_k et donc la suite

$$\|u_{\varphi(n)} - \sum_{i=1}^d l_i^\circledast e_i\| = \max(|x_{\varphi(n)}^\circledast - l_1^\circledast|; |x_{\varphi(n)}^\circledast - l_2^\circledast|; \dots; |x_{\varphi(n)}^\circledast - l_d^\circledast|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

 **vidéo 8.1 (\mathcal{D}_A):** En dimension fini, il existe une norme pour laquelle le fermé



Recherche d'exemples pour la semaine du 11 mars

N° 19: Une suite bornée de $\mathbb{R}[X]$ (munie d'une norme que vous choisirez) qui ne possède aucune valeur d'adhérence.

Théorème 7.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve : Soit N une norme sur E , (e_1, e_2, \dots, e_d) une base de E , posons $\| \sum_{i=1}^d x_i^\circledast e_i \|_\infty = \max(|x_1^\circledast|, |x_2^\circledast|, \dots, |x_d^\circledast|)$, d'après le lemme les fermés bornés de $(E, \| \cdot \|_\infty)$ sont des compacts, montrons que N et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes. Montrons que N est continue pour $(E, \| \cdot \|_\infty)$

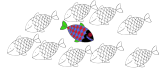
$$N(x - y) = N\left(\sum_{i=1}^d (x_i^\circledast - y_i^\circledast) e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d N\left((x_i^\circledast - y_i^\circledast) e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d |x_i^\circledast - y_i^\circledast| N(e_i) \leq \|x - y\|_\infty \sum_{i=1}^d N(e_i)$$

Soit S la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, $S = \{x \in E / \|x\|_\infty = 1\}$, S est un fermé, borné c'est donc un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, la fonction N étant continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans \mathbb{R} , l'image de S par N est un compact de \mathbb{R} , il possède un plus petit et un plus grand élément, il existe donc $a, b \in S$ tels que $\forall x \in S, N(a) \leq N(x) \leq N(b)$, comme $a \neq 0$, on a $N(a) > 0$. Finalement pour n'importe quel $x \neq 0$ de E on a $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$ donc $\forall x \in S, N(a)\|x\|_\infty \leq N(x) \leq N(b)\|x\|_\infty$, ce qui montre l'équivalence des normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

 vidéos 8.2 (\mathcal{D}_B): En dimension fini, le

Théorème 7.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés de $(E, \|\cdot\|)$.

Preuve : Conséquence immédiate du lemme et du théorème précédents. Soit K un fermé borné de $(E, \|\cdot\|)$, d'après le lemme il existe une norme N pour laquelle les fermés bornés sont compacts. D'après le théorème $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes donc K est un fermé borné de (E, N) , c'est donc un compact de (E, N) , comme les normes $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes c'est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.



Recherche d'exemples pour la semaine du 11 mars

N° 20: Une partie F de l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\|(u_n)\| = \sup |u_n|$, qui est fermée, bornée et pas compacte.

fin de la semaine 7 

8 Convergence uniforme des suites de fonctions réelles

 vidéos 8.3: Suite

8.1 Convergence simple

Soit D un ensemble. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de D dans \mathbb{R} . Pour chaque n entier fixé, f_n est une fonction de D dans \mathbb{R} .

Définition 8.1 Soient D un ensemble, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{R} , et f une fonction de D dans \mathbb{R} . On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur D lorsque pour tout $x \in D$ on a

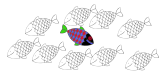
$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$



Recherche d'exemples pour la semaine du 1 avril

N° 21: Une suite de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui convergent simplement vers la fonction partie entière sur \mathbb{R} .

Exemple 8.1 Pour $n \in \mathbb{N}$ soit la fonction $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

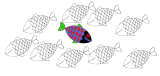
On remarque que les fonctions f_n sont continues sur $[0; 1]$ mais que leur limite f n'est pas continue sur $[0; 1]$. Une autre façon de dire cela :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Exemple 8.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1 + \frac{x}{n})^n \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 1 avril

N° 22: Une suite croissante de fonctions décroissantes qui converge simplement vers la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* ($f(x) = \frac{1}{x}$).

Proposition 8.1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} convergeant simplement vers une fonction f sur I .

- 1) Si I est un intervalle symétrique et si f_n est paire (respectivement impaire) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est paire (respectivement impaire).
- 2) Si $I = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que f_n est T -périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est T -périodique.
- 3) Si f_n est croissante (respectivement décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante (respectivement décroissante).

8.2 Convergence uniforme

Définition 8.2 Soient D un ensemble, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{R} , et f une fonction de D dans \mathbb{R} . On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur D lorsque

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela s'écrit aussi

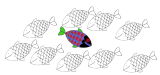
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

vidéo 8.4: Convergence simple et convergence uniforme.

Remarque 8.1 A comparer avec la définition de la convergence simple

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dans un cas le N dépend du x et du ε , dans l'autre cas N ne dépend que de ε , c'est le même N pour tous les x de D .



Recherche d'exemples pour
la semaine du 1 avril

N° 23: Une suite de fonctions continues $f_n : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge simplement mais pas uniformément sur $[1; 2]$.

Proposition 8.2 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur un ensemble D alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur D .

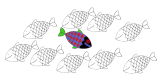
Preuve : Soit $x \in D$ (ce x est fixé pour la suite de la preuve), on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)|$$

or $\sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Comme cela est vrai pour tout $x \in D$ on a bien la convergence simple de la suite de fonction (f_n) vers f .

vidéo 9.1 (\mathcal{D}_B): La convergence uniforme entraîne la convergence simple.




Recherche d'exemples pour
la semaine du 1 avril

N° 24: Une suite de fonctions discontinues $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction exponentielle.

8.3 Continuité et convergence uniforme

Théorème 8.1 Soient D une partie de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{R} . On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue en a , alors f est continue en a .

 vidéo 9.2 (\mathcal{D}_A): La convergence uniforme conserve la continuité.

Remarque 8.2 Il s'agit d'un résultat d'interversion de limites, que l'on peut encore écrire sous la forme dans le cas de la convergence uniforme :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Preuve : On cherche à montrer que sous certaines conditions sur x on a $|f(x) - f(a)|$ petit, pour montrer cela on va chercher à comparer des termes que l'on sait comparer, à l'aide de l'inégalité triangulaire on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

La convergence uniforme permet d'affirmer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ et $x \in D$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

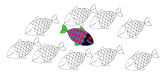
D'autre part la fonction f_N est continue en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \delta$ on a

$$|f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \delta$. On a alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

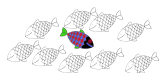
Cela prouve bien que f est continue en a



Recherche d'exemples pour la semaine du 1 avril

N° 25: Une suite de fonctions (f_n) telle que $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 3$.

Proposition 8.3 Soit D une partie de \mathbb{R} , l'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \in \mathbb{R}/t \in D\}$ est une norme sur l'espace $B(D, \mathbb{R})$ des fonctions de D dans \mathbb{R} bornées. Une suite de fonctions bornées (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction f si et seulement si la suite de vecteurs (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$



Recherche d'exemples pour la semaine du 1 avril

N° 26: Une suite de fonctions continues qui converge simplement sur \mathbb{R} vers f , avec f qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et pour tout n f_n tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

fin de la semaine 8 

9 Convergence uniforme, intégrale et dérivée

9.1 Intégrale de la limite


Théorème 9.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors f est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

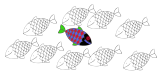
Preuve : On sait déjà que f est continue, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est donc bien définie. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f_n(x) \, dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) \, dx \right| && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx && \text{(propriété de l'intégrale)} \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty \, dx && \text{(la borne supérieure est un majorant)} \\ &\leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Remarque 9.1 Attention cela n'est valable que pour les intégrales sur un intervalle $[a, b]$ borné, sinon la dernière inégalité ne permet pas de conclure.

 **vidéo 10.1** (\mathcal{D}_A): La convergence uniforme et l'intégrale sur un segment.

Remarque 9.2 Un théorème d'intégration très important : Le théorème de convergence dominée, vu dans le cours d'intégration.



Recherche d'exemples pour la semaine du 1 avril

N° 27: Une suite de fonctions (f_n) qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers f , avec $\int_{\mathbb{R}} f(t) \, dt = 2$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) \, dt = 1$.

 **vidéo 9.3:** La convergence uniforme ne permet pas de conserver la dérivabilité. Exemple

9.2 Dérivabilité de la limite

Théorème 9.2 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R} . Si

- 1) (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) (f'_n) converge uniformément vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors f est de classe \mathcal{C}^1 , $f' = g$, et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I .

Preuve : D'après le théorème 8.1, la fonction g est continue. Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f_n est de classe \mathcal{C}^1 on a pour tout $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) \, dt$$

Comme (f'_n) converge uniformément vers g sur le segment $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$, d'après le théorème 9.1

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) \, dt$$

Cela prouve que

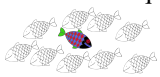
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) \, dt$$

f est donc de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée g .

Soit $[a, b] \subset I$. Pour $x \in I \in I$ on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) \, dt - f(x_0) - \int_{x_0}^x g(t) \, dt \right| \\ &= \left| f_n(x_0) - f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) \, dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| \, dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + |x - x_0| \|f'_n - g\|_\infty \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + (b - a) \|f'_n - g\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui montre que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .



Recherche d'exemples pour la semaine du 1 avril

N° 28: Une suite de fonctions (f_n) qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers f , une fonction dérivable et pour tout n , f_n n'est pas dérivable en 1 et en -1.

📺 vidéo 10.2 (\mathcal{D}_B): La convergence uniforme et la dérivation.

fin de la semaine 9 🍁

10 Série de fonctions, convergence uniforme et convergence normale

📺 vidéo 10.3: Diverse

Définition 10.1 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'une partie de \mathbb{R} , D , dans \mathbb{R} . On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement sur D lorsque la suite de fonctions numériques $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge simplement sur D . Dans ce cas on note $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ la fonction qui à $x \in D$ associe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Exemple 10.1 La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge simplement sur $] - 1, 1[$, et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ la somme partielle S_N est telle que, pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}.$$



Recherche d'exemples pour
la semaine du 1 avril

N° 29: Une série de fonctions qui converge simplement vers la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $] - 1; 1[$.

📺 vidéo 10.4: Convergence uniforme de

Définition 10.2 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'une partie de \mathbb{R} , D , dans \mathbb{R} . On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur D lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément sur D .

Exemple 10.2 La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1[$

En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$S_N(x) - \frac{1}{1-x} = \frac{-x^{N+1}}{1-x}$$

$$\text{et } \sup \left\{ \left| \frac{-x^{N+1}}{1-x} \right| \mid x \in] - 1; 1[\right\} = +\infty$$

Définition 10.3 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'une partie de \mathbb{R} , D , dans \mathbb{R} . On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur D lorsqu'il existe une suite de réels (α_n) telle que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq \alpha_n$
- 2) La série numérique $\sum \alpha_n$ converge.

Proposition 10.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. Dans ce cas on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument.

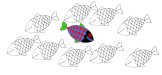
Preuve : Posons $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = \max(0, -u_n)$, $S_n^+ = \sum_{k=0}^n u_k^+$, $S_n^- = \sum_{k=0}^n u_k^-$. Évidemment, u_k^+ et u_k^- sont des réels positifs et $u_k^+ \leq |u_k|$ et $u_k^- \leq |u_k|$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est convergente, il en est de même des séries à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^-$. On a $S_n = S_n^+ - S_n^-$ la suite de réels (S_n) converge donc comme différence de deux suites convergentes. La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Proposition 10.2 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur D alors il existe une fonction $S : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément vers S sur D

Preuve : Soit $x \in D$ fixé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, et $\sum \alpha_n$ converge, donc $\sum_n |f_n(x)|$ converge. D'après la proposition précédente $\sum_n f_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge donc simplement sur D vers une fonction S .

$|S_n - S| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$, or la série $\sum \alpha_k$ étant convergente cette quantité peut être rendu inférieure à n'importe quel ε quitte à prendre n assez grand.



Recherche d'exemples pour
la semaine du 1 avril

N° 30: Une série de fonctions qui converge uniformément sur l'intervalle $[-1; 1]$, et qui ne converge pas normalement sur cet intervalle.

fin de la semaine 10

11 Systèmes différentiels linéaire à coefficients constants

11.1 Cas diagonalisable dans \mathbb{R} sans second membre.

11.2 Cas diagonalisable dans \mathbb{R} avec second membre.

11.3 Cas diagonalisable dans \mathbb{C} sans second membre.

11.4 Cas des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

fin de la semaine 11

12 Systèmes différentiels linéaires : résultats généraux

12.1 Théorème de Cauchy linéaire

Dans ce paragraphe I est un intervalle de \mathbb{R}

$A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions continues.

On note (S) le système d'inconnue $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable.

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \forall t \in I$$

et (S') le système homogène associé $X'(t) = A(t)X(t) \quad \forall t \in I$

Proposition 12.1 Les solutions de (S') forment un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 12.2 Soit X_0 une solution de (S) , une fonctions X de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une solution de (S') si et seulement si $X_0 + X$ est une solution de (S) .

Théorème 12.1 (admis) Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution X sur l'intervalle I .

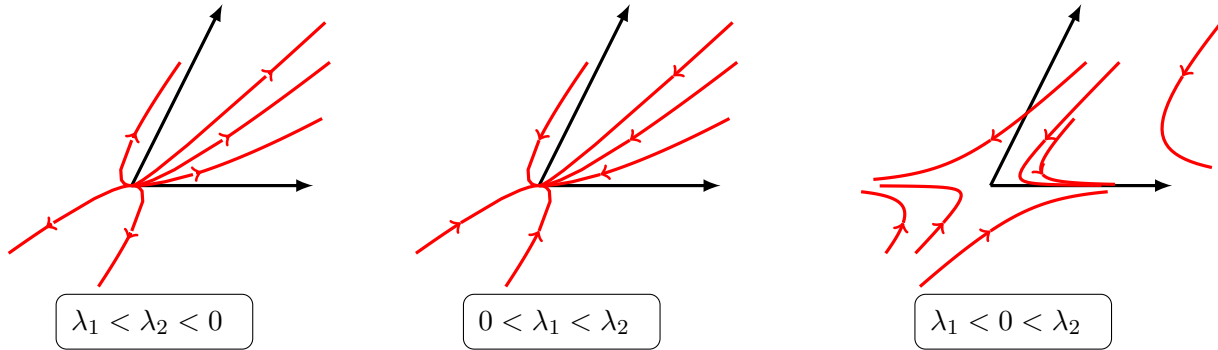
Proposition 12.3 Les solutions de (S) forment un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si l'on note \mathcal{S} l'espace des solutions de (S) l'application $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(X) = X(t_0)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

13 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants d'ordre 1 sans second membres en dimension 2, forme des solutions

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considérons le système différentiel linéaire (S) $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ d'inconnues $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, la résolution de (S) revient celle de l'équation différentielle linéaire : $X' = AX$.

Soit λ_1, λ_2 les valeurs propres dans \mathbb{C} de A . Il y a alors plusieurs cas :



1^{er} cas : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dans ce cas, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, si l'on pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$. Notons $U = P^{-1}X$, on a alors

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow U' = DU \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} U_1' = \lambda_1 U_1 \\ U_2' = \lambda_2 U_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} U_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ U_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant V_1, V_2 les colonnes de P , la solution générale de (E) sur \mathbb{R} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2,$$

où $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. En se plaçant dans le repère $(O; V_1, V_2)$,

- 1) $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ nœud propre stable O est un point attractif.
- 2) $0 < \lambda_1$ et $0 < \lambda_2$ nœud propre instable O est un point répulsif
- 3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ col (instable)

2^{ème} cas : Deux valeurs propres complexes conjuguées

$(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$ On a alors $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$; il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$. Notons $V_1 + iV_2$ et $V_1 - iV_2$ les colonnes de P .

$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2) \text{ donc } \begin{cases} AV_1 = \alpha V_1 - \beta V_2 \\ AV_2 = \alpha V_2 + \beta V_1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} A(V_1 + V_2) = \alpha(V_1 + V_2) + \beta(V_1 - V_2) \\ A(V_1 - V_2) = \alpha(V_1 - V_2) - \beta(V_1 + V_2) \end{cases}$$

Dans la base $(V_1 + V_2; V_1 - V_2)$ la matrice de l'endomorphisme φ_A de matrice A dans la base canonique est donc la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, dans cette base le système devient donc $U'(t) = BU(t)$, avec $U(t) = Q^{-1}X$, où les colonnes de Q sont $V_1 + V_2$ et $V_1 - V_2$

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = QBQ^{-1}X \\ &\Leftrightarrow Q^{-1}X' = BQ^{-1}X \\ &\Leftrightarrow (Q^{-1}X)' = BQ^{-1}X \\ &\Leftrightarrow U' = BU \end{aligned}$$

En posant $V = e^{-\alpha t}U$ on obtient $V' = -\alpha e^{-\alpha t}U + e^{-\alpha t}U' = -\alpha e^{-\alpha t}U + e^{-\alpha t}BU = (-\alpha I + B)V$, on a donc

$$X' = AX \Leftrightarrow V' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} V$$

Pour résoudre ce système $(S_1) : V' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} V$ voici deux façons de voir les choses :

Rédaction 1 : On remarque que les vecteurs $V_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix}$ et $V_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$ sont solutions de (S_1) , on peut alors chercher une solution qui s'écrirait $T(t) = \lambda_1(t)T_1(t) + \lambda_2(t)T_2(t)$, un peu comme la variation de la constante en dim 1. Toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 dérivable s'écrit bien ainsi avec λ_1 et λ_2 dérivables, il suffit de résoudre le système linéaire de déterminant 1.

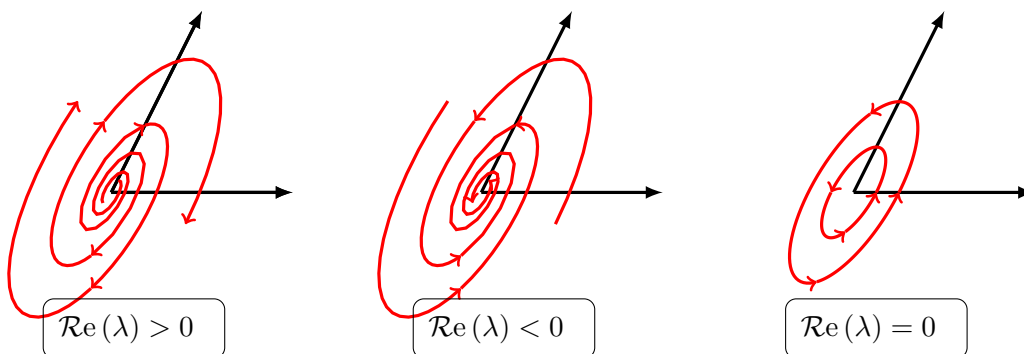
$$\begin{aligned} V' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} V &\Leftrightarrow \lambda_1'V_1 + \lambda_1V_1' + \lambda_2'V_2 + \lambda_2V_2' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} (\lambda_1V_1 + \lambda_2V_2) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1'V_1 + \lambda_2'V_2 = 0 \text{ car } V_1 \text{ et } V_2 \text{ sont solutions.} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1' = \lambda_2' = 0 \text{ car la matrice constituée des colonnes } T_1 \ T_2 \text{ est inversible car de déterminant 1.} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont donc des constantes.} \end{aligned}$$

Reprenons alors les différents éléments du calcul V puis U puis X .

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow U(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = Q \begin{pmatrix} W_1e^{\alpha t} \cos(\beta t) - W_2e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ W_1e^{\alpha t} \sin(\beta t) + W_2e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les solutions dans la base $(V_1 + V_2; V_1 - V_2)$ s'écrivent donc

$$X(t) = (W_1e^{\alpha t} \cos(\beta t) - W_2e^{\alpha t} \sin(\beta t))(V_1 + V_2) + (W_1e^{\alpha t} \sin(\beta t) + W_2e^{\alpha t} \cos(\beta t))(V_1 - V_2)$$



3^{ème} cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ et A diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$

4^{ème} cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ et A non diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

fin de la semaine 12 🍷

14 Exponentielle de matrice

Dans cette partie, on note \mathbb{R}^n les matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

14.1 Intro

On cherche à résoudre le système $Y' = AY$, où A est une matrice constante, une idée est de chercher une solution sous forme de série entière c'est ainsi que l'on trouve l'exponentielle dans le cas de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$. : Voyons l'idée ce qui suit manque de rigueur mais cela justifie ce que l'on va faire par la suite,

cherchons une solution de la forme $Y' = \sum_n C_n t^n$

On peut espérer avoir $\sum_n n C_n t^{n-1} = A \sum_n C_n t^n$

On peut espérer avoir $\sum_n (n+1) C_{n+1} t^n = \sum_n A C_n t^n$

On peut espérer avoir $\sum_n ((n+1) C_{n+1} - A C_n) t^n = 0$

On peut espérer avoir $(n+1) C_{n+1} - A C_n = 0$ pour tout n

On peut espérer avoir $C_n = \frac{1}{n} A C_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} A^2 C_{n-2} = \dots = \frac{1}{n!} A^n C_0$

On peut chercher à définir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n C_0 t^n$ et espérer que ce soit les solutions de notre système.

14.2 Normes multiplicatives sur les matrices

On rappelle l'inégalité de Cauchy Schwarz sur \mathbb{R}^n .

Proposition 14.1 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, (\sum_{i=1}^n X_i Y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n X_i^2) (\sum_{j=1}^n Y_j^2)$

Définition 14.1 On définit la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ par $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q M_{i,j}^2}$

Proposition 14.2 $\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \forall N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}), \|MN\|_2 \leq \|M\|_2 \|N\|_2$, on dit que la norme $\|\cdot\|_2$ est sous multiplicative.

Preuve :

$$\|MN\|_2^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r (MN)_{i,j}^2 \quad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r (\sum_{k=1}^q M_{i,k} N_{k,j})^2 \quad (2)$$

$$\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r (\sum_{k=1}^q M_{i,k}^2) (\sum_{l=1}^q N_{l,j}^2) \quad (3)$$

$$\leq \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q M_{i,k}^2 (\sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^q N_{l,j}^2) \quad (4)$$

$$\leq \|M\|_2^2 \|N\|_2^2 \quad (5)$$

14.3 CNS de convergences d'une suite de matrice

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme choisie.

Proposition 14.3 Soit (M_k) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) La suite (M_k) converge vers L .
- 2) Pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixés la suite de réels $((M_k)_{i,j})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $L_{i,j}$.
- 3) Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixés, la suite de réels $(X^t M_k Y)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $X^t L Y$.

dans ce cas on a donc pour tout $i, j : \lim_k \underbrace{((M_k)_{i,j})}_{\text{suite de réels}} = \left(\lim_k \underbrace{(M_k)}_{\text{suite de matrices}} \right)_{i,j}$

et pour toute matrice colonne $X, Y : \lim_k \underbrace{X^t M^k Y}_{\text{suite de réels}} = X^t \lim_k \underbrace{(M_k)}_{\text{suite de matrices}} Y$

Preuve : Le deuxième point est équivalent à la convergence pour la norme définie par $\|M\|_\infty = \max \{|M_{i,j}| \in \mathbb{R}/i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Les deux premiers points sont donc équivalent.

2)⇒3) $X^t M_k Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i (M_k)_{i,j} Y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i Y_j (M_k)_{i,j}$ qui n'est autre que la somme de n^2 suites convergentes.

3)⇒2) Il suffit de prendre X avec des 0 partout sauf sur la i ème ligne avec un 1 et Y avec des 0 partout sauf sur la j ème ligne avec un 1, dans ce cas on a $X^t M_k Y = (M_k)_{i,j}$, c'est à dire l'élément de la ligne i de la colonne j de la matrice M_k .

Soit L la limite de la suite de matrices (M_k) ,

$$|X^t LY - X^t M_k Y| = |X^t (L - M_k) Y| = \|X^t (L - M_k) Y\|_2 \leq \|X^t\|_2 \|L - M_k\|_2 \|Y\|_2$$

Or $\lim \|L - M_k\|_2 = 0$, donc $\lim |X^t LY - X^t M_k Y| = 0$ donc $\lim X^t M_k Y = X^t LY$

Proposition 14.4 Une série de matrices $\sum M_k$ converge si et seulement si pour toutes matrices colonnes X, Y la série numérique de terme général $X^t M_k Y$ est convergente.

Preuve : Il s'agit juste d'appliquer la proposition précédente à la suite des sommes partielles de la série.

14.4 Définition de l'exponentielle de matrice

Définition 14.2 Soit M une matrice carrée, la série de matrices $\sum_k \frac{1}{k!} M^k$ est convergente, on note e^M sa somme.

Preuve : Soit X et Y des matrices colonnes $|X^t \frac{1}{k!} M^k Y| \leq \|X^t\|_2 \|\frac{1}{k!} M^k\|_2 \|Y\|_2$ par **sous multiplicativité** de la norme $\|\cdot\|_2$. puis par la définition d'une norme $\|\frac{1}{k!} M^k\|_2 = \frac{1}{k!} \|M^k\|_2$, enfin en réitérant la sous multiplicativité on obtient $\|M^k\|_2 \leq \|M\|_2^k$. Finalement $|X^t \frac{1}{k!} M^k Y| \leq \frac{1}{k!} \|X^t\|_2 \|M\|_2^k \|Y\|_2$ qui est le terme général d'une série convergente en effet c'est à une constante $(\|X^t\|_2 \|Y\|_2)$ près le terme général de l'exponentiel réel en $\|M\|_2 \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 14.3 la série de matrices $\sum_k \frac{1}{k!} M^k$ est donc convergente.

14.5 Dérivée de $t \mapsto e^{tM}$

Remarque 14.1 Pour une fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n on peut définir la dérivabilité de F par la dérivabilité des n composantes et la dérivée de F en un point a par $F'(a) = (F'_1(a), F'_2(a), \dots, F'_n(a))$. Par exemple si $F(t) = (t^2, \cos t)$ alors $F'(t) = (2t, -\sin t)$. De même pour une fonction F de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut définir la dérivée de F en a par la matrice dont le coefficient à la ligne i et la colonne j est la dérivée du coefficient à la ligne i et la colonne j de $F(t)$ ainsi si $F(t) = \begin{pmatrix} t^2 & e^{2t} \\ t^3 & \sin t \end{pmatrix}$ alors F est dérivable et $F'(t) = \begin{pmatrix} 2t & 2e^{2t} \\ 3t^2 & \cos t \end{pmatrix}$

Proposition 14.5 Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) La fonction F est dérivable en a .
- 2) Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la fonction $X^t F Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a .

Et dans ce cas pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\underbrace{(X^t F Y)'(a)}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} = X^t \underbrace{F'(a) Y}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathbb{R}$.

Proposition 14.6 Soit M une matrice carrée la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $F(t) = e^{tM}$ est dérivable de dérivée $F'(t) = M e^{tM} = e^{tM} M$

Preuve : Soit X et Y des matrices colonnes, définissons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = X^t F(t) Y$ on a donc

$$f(t) = X^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k M^k \right) Y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} t^k X^t M^k Y \right)$$

qui est une série entière de rayon de convergence infini car $|\frac{1}{k!} t^k X^t M^k Y| \leq \frac{1}{k!} t^k \|X^t\|_2 \|M\|_2^k \|Y\|_2$ f est donc une fonction dérivable de dérivée $f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k!} t^{k-1} X^t M^k Y \right)$ donc

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} X^t M^{k-1} (MY) \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s!} t^s X^t M^s (MY) \right) \stackrel{14.3}{=} X^t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} t^s M^s \right) (MY) = X^t e^{tM} (MY)$$

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} X^t M M^{k-1} Y \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s!} t^s (M^t X)^t M^s Y \right) \stackrel{14.3}{=} (M^t X)^t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} t^s M^s \right) Y = X^t M e^{tM} Y$$

14.6 Solutions des systèmes $Y' = AY$

Proposition 14.7 Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fonctions dérivables en a alors leur produit est dérivable et

$$(FG)'(a) = F'(a)G(a) + F(a)G'(a)$$

Preuve : $(FG)_i(x) = \sum_{j=1}^n F_{i,j}G_j(x)$, $(FG)_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donc une fonction dérivable en a comme somme de produit de fonctions dérivables en a et $(FG)'_i(a) = \sum_{j=1}^n F'_{i,j}(a)G_j(a) + F_{i,j}(a)G'_j(a) = \sum_{j=1}^n F'_{i,j}(a)G_j(a) + \sum_{l=1}^n F_{i,l}(a)G'_l(a) = (F'(a)G(a))_i + (F(a)G'(a))_i$

Proposition 14.8 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$e^{t_1 M} e^{t_2 M} = e^{(t_1+t_2)M}$$

En particulier e^{tM} est inversible et $e^{tM} e^{-tM} = e^{0M} = I$

Preuve : Posons $F(t) = e^{tM} e^{-tM}$, $F'(t) = M e^{tM} e^{-tM} + e^{tM} e^{-tM} (-M)$, or M et e^{tM} commutent d'après la proposition 14.6, donc $F'(t) = 0$ donc F est constante sur \mathbb{R} et $F(0) = I$ donc pour tout $T \in \mathbb{R}$, $e^{TM} e^{-TM} = I$
Posons $G(t) = e^{(t_1+t)M} e^{-t_1 M} e^{-tM}$, comme précédemment on a $G'(t) = M e^{(t_1+t)M} e^{-t_1 M} e^{-tM} + e^{(t_1+t)M} e^{-t_1 M} e^{-tM} (-M)$ donc $G' = 0$ donc G est une fonction constante sur \mathbb{R} et $G(-t_1) = I$, donc $e^{(t_1+t)M} e^{-t_1 M} e^{-tM} = I$.

Théorème 14.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, les solutions du système $(E) : Y' = AY$ d'inconnue $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un espace vectoriel de dimension n , ce sont les fonctions $t \rightarrow e^{tA}C$ où C est une matrice colonne quelconque.

Preuve : Soit $C \in \mathbb{R}^n$, l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(t) = e^{tA}C$ est dérivable de dérivée $F'(t) = Ae^{tA}C$, F est donc solution du système différentielle (E) . Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(t) = e^{tA}e^{-tA}G(t)$ et $U(t) = e^{-tA}G(t)$, donc $H(t) = e^{tA}U(t)$. On peut alors dériver $G'(t) = Ae^{tA}U(t) + e^{tA}U'(t)$. G est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Ae^{tA}U(t) + e^{tA}U'(t) = Ae^{tA}U(t)$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA}U'(t) = 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U'(t) = 0$, on a donc montré que les seules solutions de (E) sont les fonctions de la forme $F(t) = e^{tA}C$ où C est une matrice colonne quelconque. On vérifie facilement que la somme de deux solutions de E est encore une solution de (E) , que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et F une solution de (E) , λF est encore une solution de (E) , et 0 est solution de (E) donc l'ensemble des solution \mathcal{S} forment un espace vectoriel. On vérifie très simplement que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{S} \\ C &\mapsto e^{tA}C \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel, donc \mathcal{S} est de dimension n .

14.7 Solutions des systèmes $Y' = AY + B$

Théorème 14.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, I un intervalle $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue les solutions du système $(E) : Y' = AY + B$ d'inconnue

$Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un espace affine de dimension n , ce sont les fonctions $t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ qui s'écrivent aussi $e^{tA}C + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ où C est une matrice colonne quelconque et $t_0 \in I$.

Preuve : Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(t) = e^{tA}e^{-tA}G(t)$ et $U(t) = e^{-tA}G(t)$, donc $H(t) = e^{tA}U(t)$. On peut alors dériver $G'(t) = Ae^{tA}U(t) + e^{tA}U'(t)$. G est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in I$, $Ae^{tA}U(t) + e^{tA}U'(t) = Ae^{tA}U(t) + B(t)$ si et seulement si pour tout $t \in I$, $e^{tA}U'(t) = B(t)$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U'(t) = e^{-tA}B(t)$, si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ on a donc montré que les seules solutions de (E) sont les fonctions de la forme $F(t) = e^{tA}C + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ où C est une matrice colonne quelconque et $t_0 \in I$. C'est à dire les fonctions qui s'écrivent comme une solution particulière de E ($\int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$) et la solution générale de l'équation sans second membre $Y' = AY : e^{tA}C$ où C est une matrice colonne quelconque.

14.8 Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable.

14.9 Calcul de l'exponentielle d'une matrice 2×2 diagonalisable dans \mathbb{C} .

Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ une matrice ayant deux valeurs propres complexes conjuguées, son déterminant est donc strictement positif égal au carré du module des deux valeurs propres et sa trace est réelle égale à deux fois la partie

réelle des valeurs propres, on peut alors la décomposer comme la somme d'une constante fois l'identité et d'une matrice de trace nulle.

$$A = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A_{11}-A_{22}}{2} & A_{12} \\ A_{21} & -\frac{A_{11}+A_{22}}{2} \end{pmatrix} = \alpha I + \begin{pmatrix} b & c \\ d & -b \end{pmatrix} = \alpha I + B$$

B n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} sinon A le serait aussi et donc son déterminant $-b^2 - cd$ est strictement positif, donc $b^2 + cd < 0$ posons $b^2 + cd = -\omega^2$.

$$\text{On a alors } B^2 = \begin{pmatrix} b & c \\ d & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ d & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + cd & 0 \\ 0 & b^2 + cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 I$$

On a donc $e^{tA} = e^{t\alpha I} e^{tB}$ car I et B commutent et dans ce cas on peut montrer que l'exponentielle de la somme est égale au produit des exponentielles.

$$e^{tA} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha t I)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k \right) \quad (6)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha t)^k I \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (tB)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (tB)^{2k+1} \right) \quad (7)$$

$$= (e^{\alpha t} I) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-\omega^2 t^2 I)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} B t^{2k+1} (-\omega^2 I)^k \right) \quad (8)$$

$$= (e^{\alpha t} I) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\omega} B \right) \quad (9)$$

$$= (e^{\alpha t} I) \left(\cos(\omega t) I + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) B \right) \quad (10)$$

fin de la semaine 13 

15 Compléments de topologie

15.1 Théorème de Heine

Définition 15.1 On dit que f est uniformément continue lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2, \quad (d_E(x', x'') \leq \eta \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Proposition 15.1 Si f est uniformément continue sur X , alors f est continue sur X .

$$\text{Si } \begin{cases} f : X \rightarrow F \text{ est uniformément continue sur } X \\ g : Y \rightarrow G \text{ est uniformément continue sur } Y \\ f(X) \subset Y \end{cases}, \text{ alors } g \circ f \text{ est uniformément continue sur } X.$$

Théorème 15.1 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, F un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, $f : X \rightarrow F$ une application.

Si X est compacte et si f est continue, alors f est uniformément continue.

15.2 Complétude

Soient $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \right).$$

qui est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, r) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N \implies d(u_{p+r}, u_p) \leq \varepsilon)$$

Proposition 15.2 Toute suite de Cauchy dans E est bornée.
Toute suite convergente dans E est de Cauchy.

Définition 15.2 On dit qu'une partie A de E est complète lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A .

On dit que E est complet si et seulement si E est une partie complète de E .

On appelle espace de Banach tout \mathbb{R} -espace vectoriel normé complet.

Proposition 15.3 Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , on a (E, N_1) est complet si et seulement si (E, N_2) est complet.

Proposition 15.4 Toute partie complète X de E est fermée.

Proposition 15.5 Soient X, Y deux parties de E telles que $X \subset Y$; si Y est complète et X fermée, alors X est complète.

Proposition 15.6 Si E est un espace de Banach, on a, pour toute partie X de E :
 X fermée $\iff X$ complète.

Proposition 15.7 Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.

Proposition 15.8 Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $a \in \bar{X}$, F un \mathbb{R} -espace vectoriel normé complet, $f : X \rightarrow F$ une application. Pour que f admette une limite finie en a , il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall (x', x'') \in X^2, ((x', x'') \in V \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Proposition 15.9 Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

16 Théorème du point fixe

Soient $F \in \mathcal{P}(E)$, $f : F \rightarrow F$ une application.

Définition 16.1 • x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.

• f est contractante si et seulement s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Proposition 16.1 Si F est complet et si f est contractante, alors f admet un unique point fixe, et, pour tout a de F , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers le point fixe de f .

fin de la semaine Complément 

Index

video

- vidéo 1.2 : Autours de la définition de limite d'une suite réelle., 4
- vidéo 1.2 : Définition d'une sous suite réelle., 4
- vidéo 2.1 (D_A) : Sous suite d'une suite convergente., 4
- vidéo 2.2 (D_B) : Toute suite de réels possède une sous suite monotone., 4
- vidéo 2.3 : définition d'une norme et d'une distance associée, 5
- vidéo 2.4 : Notion de voisinages et d'ouverts, 6
- vidéo 3.1 (D_B) : Les boules ouvertes sont des ouverts de E , 7
- vidéo 3.2 (D_A) : Une réunion d'ouverts de E est un ouvert de E , 7
- vidéo 3.3 : Notion d'intérieur, 7
- vidéo 3.4 : Notion d'adhérence, 8
- vidéo 4.1 (D_A) : $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A , 7
- vidéo 4.2 (D_B) : \bar{A} est le plus petit fermé qui contient A , 8
- vidéo 4.3 : Suites convergentes dans un EVN, 8
- vidéo 4.4 : Valeur d'adhérence, 10
- vidéo 5.1 (D_B) : CNS à l'aide de suites pour que $x \in \bar{A}$, 9
- vidéo 5.2 (D_A) : CNS à l'aide de suites pour qu'une partie de E soit un fermé, 9
- vidéo 5.3 : Définition de la notion de limite pour une fonction d'un EVN dans un EVN, 10
- vidéo 5.4 : Lien entre continuité et limite dans un EVN, 11
- vidéo 6.1 (D_B) : Continuité séquentielle, 12
- vidéo 6.2 (D_A) : Continuité et image réciproque d'ouverts, 12
- vidéo 6.3 : Définition de compact., 13
- vidéo 6.4 : Maximum ou borne supérieure quelle différence ?, 13
- vidéo 7.1 (D_A) : Toute partie compacte de E est fermée bornée dans E ., 13
- vidéo 7.2 (D_B) : L'image par une application continue d'un compact est un compact., 13
- vidéo 7.3 : Un exemple d'espace vectoriel en dimension infinie., 14
- vidéo 7.4 : Un exemple de suite de suites., 14
- vidéo 8.1 (D_A) : En dimension fini, il existe une norme pour laquelle les compacts sont les fermés bornés., 14
- vidéo 8.2 (D_B) : En dimension fini, les normes sont équivalentes., 14
- vidéo 8.3 : Suites de fonctions : attention aux notations., 15
- vidéo 8.4 : Convergence simple et convergence uniforme., 16
- vidéo 9.1 (D_B) : La convergence uniforme entraîne la convergence simple., 16
- vidéo 9.2 (D_A) : La convergence uniforme conserve la continuité., 16
- vidéo 9.3 : La convergence uniforme ne permet pas de conserver la dérivabilité. Exemple, 17
- vidéo 10.1 (D_A) : La convergence uniforme et l'intégrale sur un segment., 17
- vidéo 10.2 (D_B) : La convergence uniforme et la dérivation., 18
- vidéo 10.3 : Diverses types de convergences pour les séries de fonctions., 18
- vidéo 10.4 : Convergence uniforme des séries de fonctions et reste, 19